ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΟΠΤΙΚΗΣ

(ΜΕ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗ)

6 - ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Ε.Δ. ΒΑΝΙΔΗΣ

ΘΕΣ/ΝΙΚΗ ΜΑΡΤΙΟΣ 2022

6 *Συμβολή του φωτός*

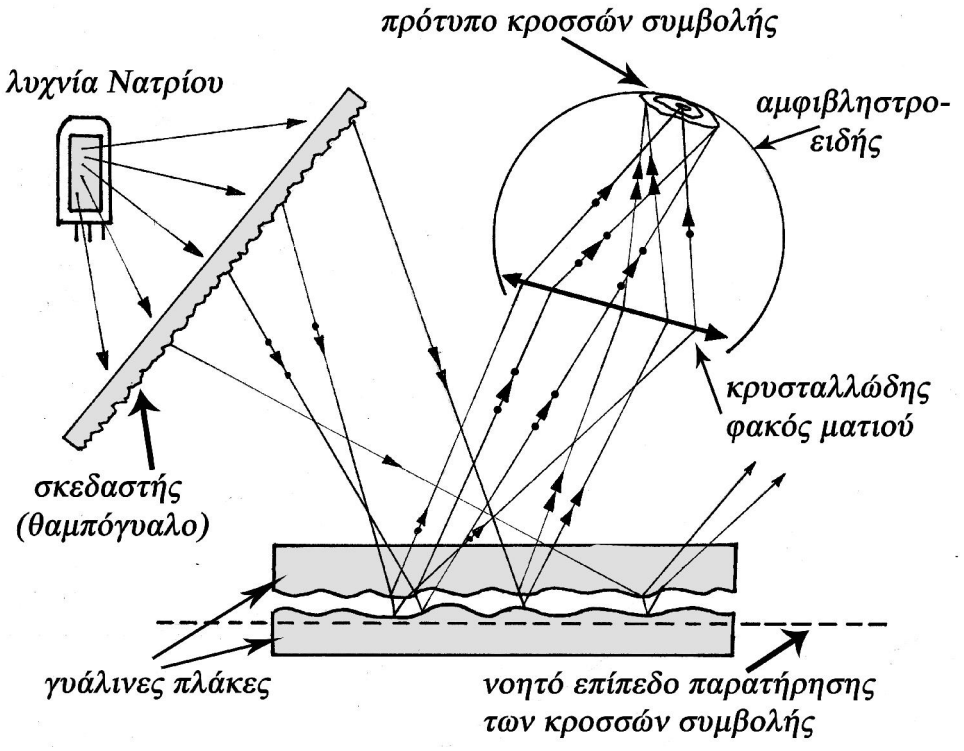
Οι διαδιδόμενες διαταραχές των Η/Μ πεδίων αποτελούν κατά τα γνωστά λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Maxwell για τα αντίστοιχα μέσα διάδοσης που θεωρούνται συνεχή. Μια από τις σπουδαιότερες ιδιότητες της προαναφερόμενης εξίσωσης, είναι ότι δέχεται σαν λύσεις και γραμμικούς συνδυασμούς μερικών λύσών της, γεγονός που εκφράζει τη λεγόμενη ***αρχή της επαλληλίας (superposition principle)*** (βλ. Κεφ. 1: Κύματα (§ 1.2)). Άρα δύο ή περισσότερα κύματα κάτω από ορισμένες συνθήκες μπορούν να προστεθούν ή ν' αφαιρεθούν συσχετιζόμενα (δηλ. ερχόμενα σε επαλληλία), με αποτέλεσμα την ανάδειξη ενός συνισταμένου κύματος με πλάτος και φάση που εξαρτάται από τα πλάτη και τις φάσεις των συνιστωσών κυμάτων.

Τα κύματα όμως στα οποία αναφερόμαστε, για κάθε μια από τις περιοχές του Η/Μ φάσματος, παράγονται συνήθως (όπως και ανιχνεύονται) με διαφορετικό τρόπο. Το συγκεκριμένο αυτό γεγονός – όπως θα δούμε στα επόμενα – είναι κεφαλαιώδους σημασίας για τον τρόπο με τον οποίο θα είναι δυνατόν τελικά δύο περισσότερες διαταραχές της ίδιας φασματικής περιοχής να αλληλοεπηρεαστούν. Για να συμβεί το τελευταίο, χρειάζεται οπωσδήποτε να υφίσταται ένα ***συσχετισμός (correlation)*** μεταξύ τους, που στην πιο απλή του μορφή εκφράζεται από μια σταθερότητα (τουλάχιστον για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα) όσον αφόρα τις διαφορές φάσης της μιας σε σχέση με την άλλη. Το γεγονός αυτό άλλωστε αποτελεί προϋπόθεση της προσθαφαίρεσης μεταξύ των πλατών τους. Το φαινόμενο ονομάζεται ***συμβολή (interference)*** και ο βαθμός κατά τον οποίο συμβάλλουν οι διαταραχές σχετίζεται με την έννοια της ***συμφωνίας (coherence)***.

Στα επόμενα θ' αναδείξουμε το αποτέλεσμα της επαλληλίας δύο δεσμών φωτός (μετώπων κύματος) σε μια περιοχή του χώρου. Με διδόμενο βέβαια ότι μεταξύ τους πληρούνται οι όροι της συμφωνίας. Δηλ. της ύπαρξης σχετικής σταθερότητας των διαφορών φάσης μεταξύ τους από σημείο σε σημείο και το οποίο θα μας οδηγήσει τελικά σε φαινόμενα συμβολής. Δηλ. σε μια περιοχή του χώρου (για το παράδειγμά μας πάνω σ' ένα επίπεδο), θα παρατηρήσουμε βρισκόμενοι σε μια ορισμένη σταθερή θέση, τοπικές (σταθερές χρονικά) αυξομειώσεις της έντασης του φωτός από θέση σε θέση. Δηλ. τους λεγόμενους ***κροσσούς συμβολής (interference fringes)***. Είναι αυτοί που φαίνονται στην (Εικ. 6.2).

Την ανάδειξη φαινομένων συμβολής στην συγκεκριμένη περίπτωση, θα την πετύχουμε με τη βοήθεια μιας πειραματικής διάταξης η οποία φαίνεται στο (Σχ. 6.1). Συνίσταται από μια ισχυρή φασματική λυχνία Νατρίου (Na), η οποία κατά τα γνωστά εκπέμπει ψευδομονοχρωματικό (βλ. στα επόμενα) φως μ.κ. $\lambda \simeq 589\text{nm}$ (κίτρινο) και φασματικού εύρους $\Delta\lambda \simeq 1\text{nm}$. Με το φως αυτό φωτίζουμε ένα επίπεδο θαμπόγυαλο. Του τελευταίου η μια επιφάνεια είναι ειδικά κατεργασμένη, με αποτέ-

λεσμα να εμφανίζει από σημείο σε σημείο τυχαίες ανωμαλίες. Με συνέπεια τελικά, το προσπίπτον από τη λυχνία Νατρίου φως κατά την έξοδό του από αυτό, να σκεδάζεται προς όλες τις κατευθύνσεις. Σχεδόν κάτω από το θαμπόγυαλο τοποθετούμε

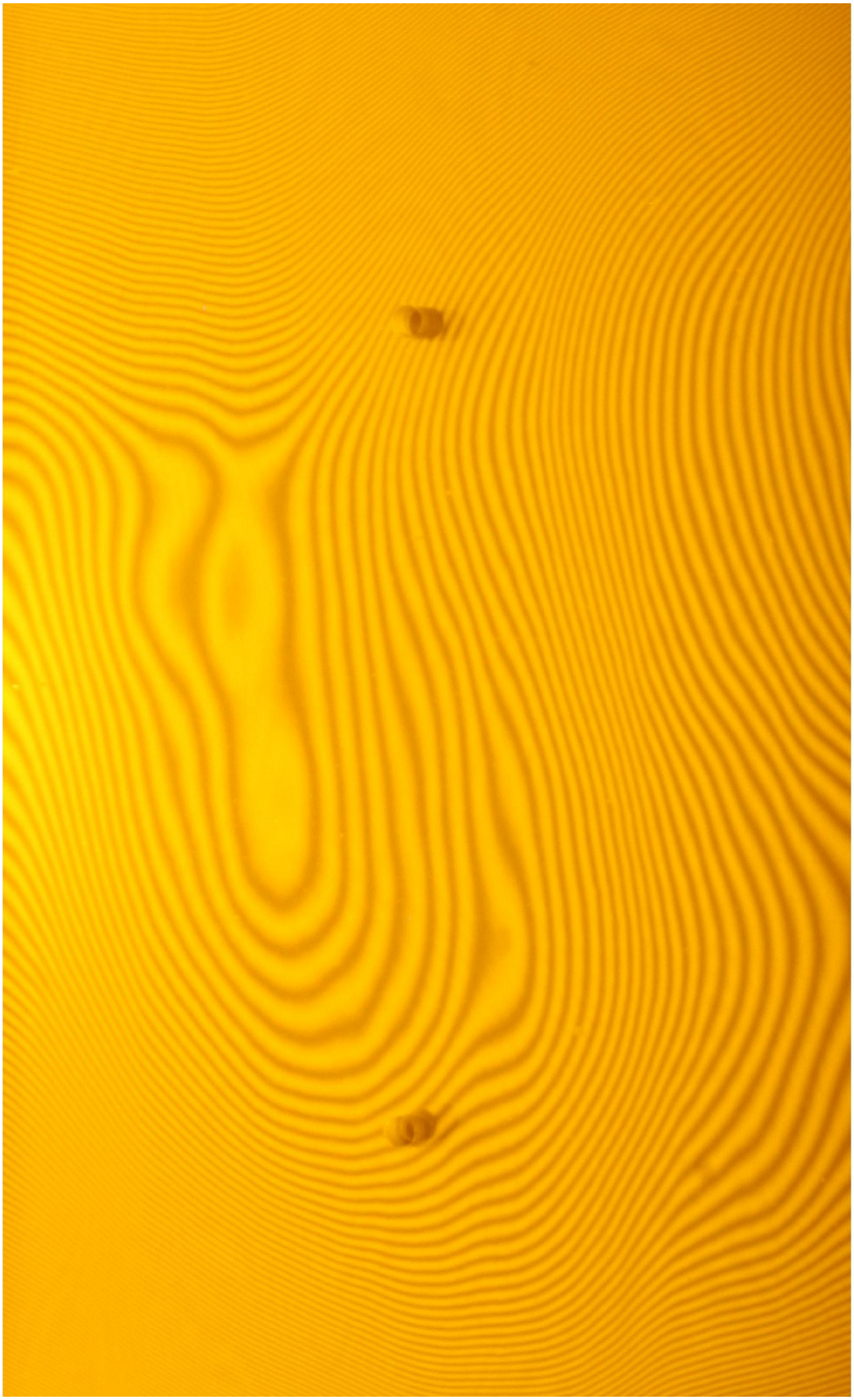


(Σχ. 6.1)

δύο κομμάτια διαφανούς επιπέδου τζαμιού, με μια από τις επιφάνειές τους σε επαφή με την άλλη. Από μακροσκοπική άποψη οι επιφάνειες αυτές φαίνονται λείες. Μικροσκοπικά όμως, εμφανίζουν διακυμάνσεις της επιπεδότητάς τους που είναι της τάξης των μικρών (χιλιοστά του χιλιοστού). Η διακύμανση αυτή στο (Σχ. 6.1) φαίνεται υπερβολικά μεγάλη για εποπτικούς λόγους.

Ένα εντελώς πολύπλοκο μέτωπο κύματος προερχόμενο από το θαμπόγυαλο, διαπερνάει την πάνω επιφάνεια της πρώτης γυάλινης πλάκας και φθάνει στην κάτω της επιφάνεια. Τότε ένα τμήμα του ανακλάται και συνεχίζει την πορεία του προς τα πάνω. Το άλλο τμήμα του διαθλάται προς το εσωτερικό του μεταβλητού πάχους υμενίου από αέρα που υφίσταται μεταξύ των δύο γυάλινων πλακών. Ανακλάται στο κάτω του τμήμα (δηλ. στην πάνω επιφάνεια της δεύτερης γυάλινης πλάκας), επαναδιανύει το υμένιο του αέρα και διαθλώμενο στην κάτω επιφάνεια της πρώτης πλάκας συνεχίζει και αυτό την πορεία του προς τα πάνω.

Κατ' αρχή από την προηγούμενη περιγραφή προκύπτει το γεγονός ότι προς το πάνω μέρος της διάταξης μετά τις γυάλινες πλάκες, διαδίδονται στον αέρα ερχόμενα σε επαλληλία δύο μέτωπα κύματος. Προκειμένου τώρα να δούμε αν μεταξύ αυτών των δύο μετ. κύματος υφίσταται ένας ορισμένος βαθμός συμφωνίας (δηλ.



(Εικ. 6.2)

μια στο χρόνο σταθερότητα όσον αφορά τις διαφορές φάσης μεταξύ τους από σημείο σε σημείο), θα επιλέξουμε και θα παρακολουθήσουμε την πορεία ορισμένων αντιπροσωπευτικών ακτινών (βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά κύματα ΠΑΡ/ΜΑ 2 (§ 2.2)) του μετώπου που εκκινούν από το θαμπόγυαλο. Για κάθε μια από αυτές τις ακτίνες, μετά την ανάκλασή τους από τις δύο επιφάνειες του μεταβλητού πάχους υμενίου από αέρα προκύπτουν δύο, οι οποίες οδεύουν μετά τις γυάλινες πλάκες με μικρή μεταξύ τους κλίση και προσπίπτουν στον κρυσταλλώδη φακό του ματιού του παρατηρητή. Το μάτι προσαρμοζόμενο, οδηγεί ανά ζεύγη τις ακτίνες αυτές (ουσιαστικά τις αντίστοιχες διαταραχές) σε επαλληλία με κατεύθυνση συγκεκριμένα σημεία του αμφιβληστροειδή χιτώνα του ματιού.

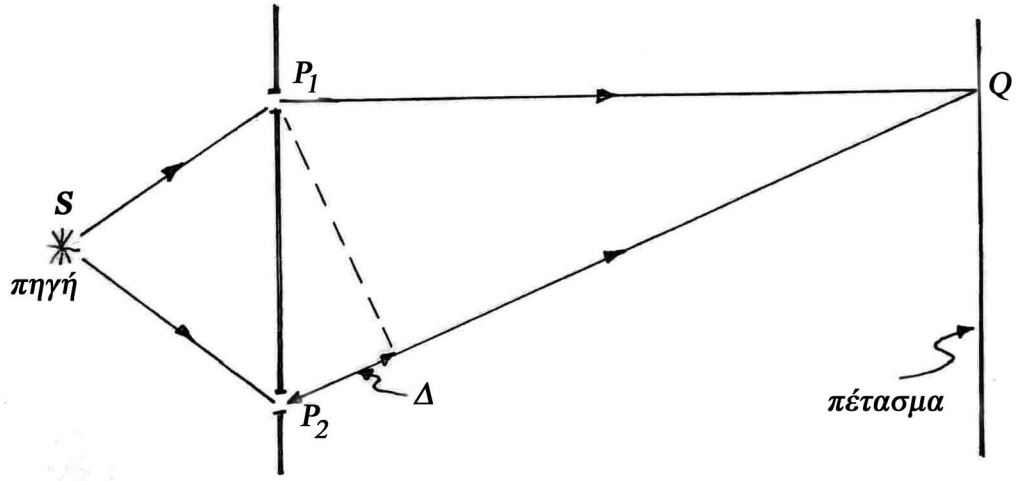
Με το δεδομένο ότι το λεπτό υμένιο από αέρα μεταξύ των γυάλινων πλακών είναι πολύ μικρού πάχους από σημείο σε σημείο, οι διαταραχές που διαδίδονται κατά ζεύγη, διατηρούν μια ορισμένη σταθερότητα όσον αφορά τις φάσεις τους. Δηλ. μεταξύ τους υφίσταται μια σταθερή διαφορά φάσης. Και το γεγονός αυτό έχει τελικά σαν αποτέλεσμα στα σημεία σύγκλισης στον αμφιβληστροειδή, να έχουμε ανάλογα με την κάθε περίπτωση προσθαφαίρεση των πλατών τους. Π.χ. σε ακραίες περιπτώσεις προκύπτει διπλασιασμός ή μηδενισμός του πλάτους τους (διαφορά φάσης 0 ή π rad) και κατά προέκταση τετραπλασιασμός ή μηδενισμός της έντασής τους. Στην πράξη βέβαια έχουμε όλες τις ενδιάμεσες μεταξύ των ακραίων, τιμές της έντασης του φωτός.

Άρα για το σύνολο των διαταραχών των προερχόμενων από το θαμπόγυαλο και που προσπίπτουν στο σύστημα των δύο γυάλινων πλακών, θα έχουμε σαν αποτέλεσμα στο αμφιβληστροειδή να σχηματιστεί μια αυξομειούμενη από σημείο σε σημείο κατανομή της έντασης του φωτός . Δηλ. όπως λέγεται, ένα πρότυπο κροσσών συμβολής. Λόγω όμως του ότι το μάτι μας βλέπει κατά την 'προέκταση' των οδευουσών σ' αυτό ακτίνων (διευθύνσεις προσπιπτόντων σ' αυτό διαταραχών), το πρότυπο των κροσσών συμβολής 'εμφανίζεται' να καταλαμβάνει (νοητά) το χώρο μεταξύ των δύο γυάλινων πλακών. Ένα τέτοιο πρότυπο κροσσών συμβολής βλέπουμε στην (Εικ. 6.2).

Φαινόμενα συμβολής, όπως αυτά του σχηματισμού των εγχρώμων κροσσών στην επιφάνεια από τις φούσκες της σαπουνάδας (συμβολή με τη βοήθεια πολυχρωματικού φωτός), είχαν περιγραφεί ακόμα από το δεύτερο μισό του $17^{ου}$ αιώνα από τους Boyle και Hooke. Αν θεωρήσουμε τις παρατηρήσεις αυτές σαν απαρχή μελέτης του φαινομένου, τότε η ιστορική εξέλιξη του (δηλ. της συμβολομετρίας) είναι συνεχής και αδιάλειπτη για περισσότερο από τρεις αιώνες και συνδέεται άρρηκτα με την ανάπτυξη της κυματικής θεωρίας του φωτός. Η τελευταία είχε προταθεί ήδη περί τα τέλη του $17^{ου}$ αιώνα (1690) από τον Huygens χωρίς όμως να γίνει αποδεκτή από το σύνολο της τότε επιστημονικής κοινότητας εξ αιτίας της κυριαρχίας της σωματιδιακής θεωρίας του Newton. Κύριο επιχείρημα του τελευταίου ήταν

ότι η κυματική θεωρία δεν θα μπορούσε να εξηγήσει την ευθύγραμμη διάδοση του φωτός καθώς και τα φαινόμενα πόλωσης. Αποτέλεσμα της αντιπαλότητας των παραπάνω θεωριών ήταν το φαινόμενο της συμβολής να καθυστερήσει όσον αφορά την πλήρη ερμηνεία του για περίπου εκατόν πενήντα χρόνια. Ένας καθοριστικός σταθμός για την αποδοχή της, υπήρξε το διάστημα μεταξύ των ετών 1801-1803 και οφείλεται στον Th. Young. Σε μια σειρά διαλέξεών του, αποδέχτηκε την αρχή της επαλληλίας των κυμάτων, με βάση την οποία ήταν δυνατόν να ερμηνευτεί το γεγονός ότι θα μπορούσαμε από τη συμβολή δύο διαταραχών του φωτός να πάρουμε ακόμα και μηδενική ένταση.

Η σημαντικότητα της πειραματικής διάταξης του Young (Σχ. 6.3), έγκειται στο ότι ο ίδιος φώτισε τα δύο μικρά ανοίγματα P_1, P_2 από τα οποία περίμενε να δει φαινόμενα συμβολής στο πέτασμα παρατήρησης, όχι με δύο διαφορετικές πηγές πίσω από αυτά, αλλά μέσω μιας κοινής πηγής σε συμμετρική θέση στο S. Με τον τρόπο αυτό αυξανόταν κατά πολύ η πιθανότητα τα κύματα από τις θέσεις P_1, P_2 να παρουσιάζουν σταθερότητα όσον αφορά τις φάσεις κατά την επαλληλία τους στο



(Σχ. 6.3)

πέτασμα. Ανάλογα με τη διαφορά οπτικού δρόμου Δ άρα και της διαφοράς φάσης από σημείο σε σημείο στο πέτασμα, είχε τη δυνατότητα να παρατηρήσει περιοδικές μεταβολές της έντασης μεταξύ φωτός και σκότους δηλ. κροσσούς συμβολής. Από μετρήσεις που έκανε, με δεδομένα: την απόσταση των ανοιγμάτων, την απόσταση του διαφράγματος των ανοιγμάτων – πετάσματος και την περίοδο των κροσσών, υπολόγισε ότι το μήκος κύματος (μ.κ.) των κυμάτων που εξέπεμπε μια πηγή κόκκινου φωτός ήταν 5.176×10^{-7} m (517.6nm). Διαπίστωσε ότι το τελευταίο είναι πράγματι ένα πολύ μικρό μέγεθος. Ο Young επίσης έδωσε μια πλήρη κυματική θεωρητική εξήγηση όλων των μέχρι τότε πειραματικών ευρημάτων του Newton που σχετιζόταν με την περιοδική φύση του φωτός.

Η δυσκολία όμως και πάλι όσον αφορά την αποδοχή της κυματικής θεωρίας οφειλόταν σε μια σειρά πειράματα που εκτελέστηκαν από τον Malus το 1809 και αποδείκνυαν την πόλωση των κυμάτων από ανάκλαση σε διηλεκτρικές επιφάνειες. Πράγματι επειδή μέχρι την εποχή εκείνη τα κύματα του φωτός από τους Young και Huygens θεωρούνταν διαμήκη ήταν αδύνατον να ερμηνευθεί η από ανάκλαση πόλωσή τους. Την λύση έδωσε ο A. Fresnel περί το 1818, ο οποίος κατά κάποιο τρόπο τελειοποίησε τη θεωρία της συμβολής εφαρμόζοντάς την για τη λύση προβλημάτων περίθλασης του φωτός. Είχε επίσης αποδείξει πειραματικά με τη βοήθεια του Arago ότι δύο δέσμες φωτός ορθογώνια πολωμένες δεν συμβάλλουν. Τα γεγονότα αυτά οδήγησαν τους Young και Fresnel στο αναπόφευκτο συμπέρασμα ότι η φύση των κυμάτων του φωτός είναι εγκάρσια. Ταυτόχρονα όμως ο Fresnel δέχτηκε σαν φορέα αυτών των εγκαρσίων διαταραχών ένα στάσιμο και αβαρές ελαστικό μέσο που διαπερνά όλη την ύλη και το ονόμασε ***αιθέρα (ether).***

Η θεωρία του αιθέρα έγινε αποδεκτή από το σύνολο σχεδόν των επιστημόνων του 18^{ου} αιώνα, παρά το ότι υπήρχαν γι' αυτήν ορισμένα ερωτήματα χωρίς προφανείς απαντήσεις. Η στατικότητα του αιθέρα αμφισβητήθηκε από θεωρητικούς υπολογισμούς του Fresnel το 1818 και αποδείχθηκε πειραματικά από τον Fizeau το 1851 μέσω κατάλληλης συμβολομετρικής διάταξης. Τα ίδια πειράματα αργότερα επανέλαβαν οι Jamin και Michelson. Τα πορίσματα αυτά οδήγησαν τον Maxwell το 1880 στο να διατυπώσει την άποψη ότι η κίνηση της γης μέσω του αιθέρα θα είχε σαν αποτέλεσμα την μεταβολή της ταχύτητας του φωτός κατά ένα ποσοστό ανάλογο με τον λόγο του τετραγώνου της ταχύτητας της γης προς αυτή του φωτός, αν και δεν ευελπιστούσε να παρατηρηθεί πειραματικά. Την απάντηση έδωσε το περίφημο για την εποχή (1881) πείραμα μέσω του συμβολομέτρου του Michelson. Το αποτέλεσμα ήταν αρνητικό από την άποψη ότι δεν παρατηρήθηκε καμιά αναμενόμενη μετακίνηση κροσσών και άρα καμιά μεταβολή της ταχύτητας του φωτός σε σχέση με την κίνηση της γης. Το συμπέρασμα αυτό οδήγησε στην απόρριψη της ύπαρξης του αιθέρα και την ανάδειξη του γεγονότος ότι η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη της κίνησης του συστήματος συντεταγμένων το οποίο ως γνωστόν αποτελεί αξίωμα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.

Έκτοτε η ανάπτυξη των διαφόρων συμβολομετρικών μεθόδων υπήρξε ταχύτατη ιδίως σε προβλήματα μετρολογίας. Έτσι το 1896 ο Michelson με την βοήθεια του συμβολομέτρου του ταυτοποιεί το πρότυπο μέτρο Pt-Ir (Λευκοχρύσου – Ιριδίου) που φυλαγόταν στις Sèvres του Παρισιού, με τη βοήθεια του μ.κ. της κόκκινης γραμμής του Cd (Καδμίου) $\lambda = 643.874\text{nm}$. Βρίσκει ότι το 1m αντιστοιχεί σε 3.106.327 μ.κ. της προαναφερόμενης ακτινοβολίας. Την ίδια εποχή οι Mach και Zehnder μέσω του συμβολομέτρου τους κατέστησαν δυνατή τη μέτρηση της πυκνότητας ενός ρευστού από σημείο σε σημείο κατά τη διάρκεια της ροής του σε διαφανές δοχείο. Επίσης κατόρθωσαν να προσδιορίσουν τις ισόφωτες επιφάνειες κα-

τά τη διάρκεια της καύσης διαφόρων τύπων πηγών φωτός. Ένα νέο πεδίο εφαρμογών ανοίγεται από τον Twyman το 1916 ο οποίος χρησιμοποιεί ένα τροποποιημένο συμβολόμετρο Michelson για τον ποιοτικό έλεγχο των διαφόρων οπτικών στοιχείων π.χ. φακών, πρισμάτων κλπ. Το ίδιο συμβολόμετρο χρησιμοποιήθηκε από τον Linnik το 1933 για την μικροσκοπική εξέταση ανακλαστικών επιφανειών.

Τα πειράματα του Michelson είχαν αποκαλύψει τη στενή σχέση που υπήρχε μεταξύ της ευκρίνειας των κροσσών συμβολής αφ' ενός και αφ' ετέρου των διαστάσεων των φωτιζόντων τις διατάξεις πηγών καθώς και των φασματικών τους κατανομών. Πρόκειται για το αποτέλεσμα του χωρο-χρονικού βαθμού συσχετισμού μεταξύ των διαταραχών που όπως ήδη αναφέραμε ονομάζεται συμφωνία. Ήδη από το 1869 ο Verdet σε δημοσίευσή του παρέθεσε δεδομένα που αφορούσαν στον υπολογισμό του βαθμού χωρικής συμφωνίας του ηλίου σαν πηγή φωτός ορισμένων διαστάσεων πάνω στην επιφάνεια της γης. Βρήκε ότι προκειμένου ν' αναδειχθούν φαινόμενα συμβολής θα έπρεπε δύο ανοίγματα μεταξύ τους να απέχουν λιγότερο από 1/20 του mm. Οι πρώτοι θεωρητικοί υπολογισμοί έγιναν από τον Laue μόλις το 1907 και συστηματοποιήθηκαν από τους van Cittert (1934), Zernike (1938), Hopkins (1951-53) και Wolf (1954-55). Μια νέα ανακάλυψη των Harbury – Brown και Twiss (1954) αφορούσε το συσχετισμό μεταξύ των εντάσεων δύο ή περισσότερων δεσμών φωτός και έδωσε νέα ώθηση στη θεωρία της μερικής συμφωνίας καθιστώντας την ανεξάρτητο κλάδο της ***στατιστικής οπτικής (statistical optics).*** Θεμελιωτές της ήταν οι Mandel και Wolf (1965).

Μια μεγάλη περιοχή εφαρμογών της συμβολομετρίας στις μέρες μας είναι αυτή που ονομάζεται ***οπτική των λεπτών υμενίων***. Αναφερόμαστε στο σχεδιασμό και την κατασκευή αντιανακλαστικών υμενίων, ανακλαστικών πολυστρωματικών υμενίων κ.λ.π. από διηλεκτρικά και μέταλλα. Τα πρώτα χρησιμοποιούνται για την ελάττωση της ανακλαστικότητας των επιφανειών και τα δεύτερα αφορούν την κατασκευή κατόπτρων με σαφώς καλύτερες ιδιότητες σε σχέση με αυτά που γίνονται μέσω εξάχνωσης μετάλλων. Η ανάπτυξη υμενίων, ήταν ήδη γνωστή μέσω εξάχνωσης διαφόρων υλικών σε κενό: Strong (1936).

Εξέχουσα θέση στον τομέα της ανάλυσης του φωτός κατέχει η ***συμβολομετρική φασματοσκοπία (interference spectroscopy)***. Οι απαρχές της ανάγονται στα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Αναφέρεται σε τεχνικές υψηλής διακριτικής ικανότητας μέσω των συμβολομέτρων Fabry-Perot, της κλιμακωτής διάταξης του φράγματος περίθλασης του Michelson και της πλάκας των Lummer-Gehrcke. Μέσω αυτών και κυρίως του συμβολομέτρου των Fabry-Perot το οποίο και τελικά επεκράτησε των άλλων λόγω των τεχνικών του βελτιώσεων, έγινε δυνατός ο προσδιορισμός ακόμα και της υπέρλεπτης υφής των φασματικών γραμμών εκπομπής ή απορρόφησης του συνόλου σχεδόν των χημικών στοιχείων και ενώσεων. Μια σχετικά νέα προσέγγιση των προαναφερομένων προβλημάτων αποτελεί η ανάπτυξη της λεγόμενης ***φασμα-***

τοσκοπίας μετασχηματισμού Fourier (Fourier transform spectroscopy). Αν και οι απαρχές της ανάγονται σε πειράματα του Fizeau (1862), ήταν ο Michelson (1891) ο οποίος κατέγραψε την ευκρίνεια των κροσσών συμβολής από διάφορες πηγές συναρτήσει της διαφοράς του οπτικού δρόμου στο αντίστοιχο συμβολόμετρό του. Αποδεικνύεται ότι ο παράγοντας της ευκρίνειας, αντιπροσωπεύει το βαθμό χρονικής συμφωνίας της ακτινοβολίας (για βαθμό χωρικής συμφωνίας ίσο με τη μονάδα) και εκφράζεται σαν το μετασχηματισμό Fourier της φασματικής της κατανομής. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι αν η καταγεγραμμένη ευκρίνεια των κροσσών εμφανίζει περιοδικότητα συναρτήσει της διαφοράς του οπτικού δρόμου, τότε αναδεικνύεται η ύπαρξη στην ακτινοβολία περισσότερων της μιας φασματικών γραμμών. Το γεγονός είναι μεγάλης σπουδαιότητας γιατί θα ήταν δυνατόν από τον προσδιορισμό του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης της ευκρίνειας των κροσσών, να υπολογιστούν με ακρίβεια ακόμη και περίπλοκες φασματικές κατανομές. Το τελευταίο επιτεύχθηκε από τον Fellqett (1951), μέσω αριθμητικών υπολογισμών του μετασχηματισμού. Περαιτέρω βελτιώσεις κατέστησαν τη μέθοδο κυρίαρχη όσον αφορά τον προσδιορισμό φασμάτων ιδίως στην υπέρυθρη περιοχή.

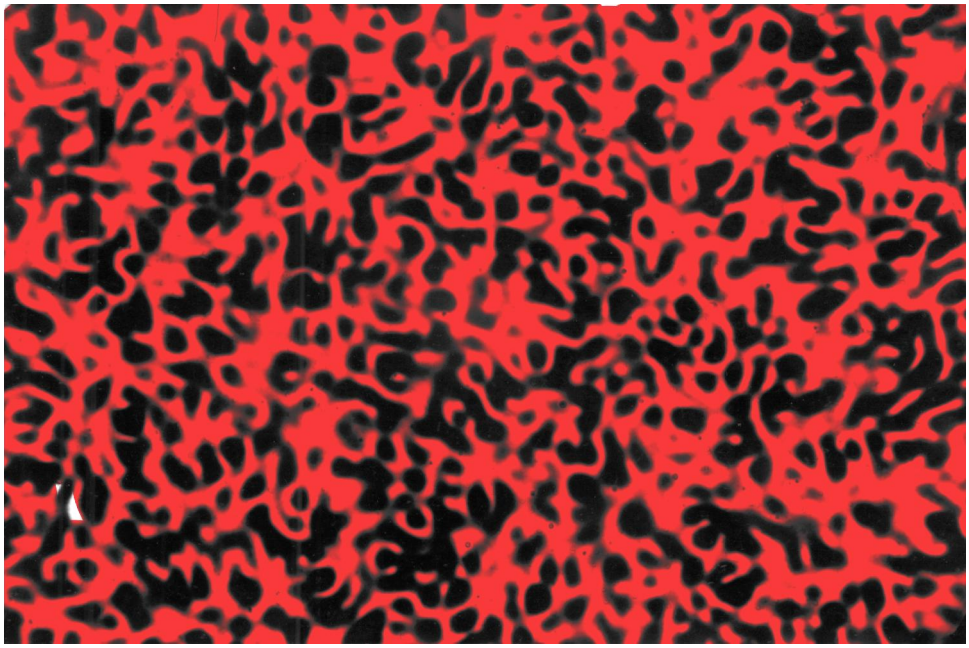
Αλματώδης εξέλιξη των συμβολομετρικών μεθόδων επιτεύχθηκε με τη χρησιμοποίηση στη δεκαετία του 1960 των πηγών Laser. Η ιδέα της προτρεπόμενης εκπομπής φωτονίων η οποία αποτελεί και το θεμέλιο της λειτουργίας τους, είχε αναφερθεί από τον Einstein ήδη από το 1917. Δηλ. ένα φωτόνιο μιας ορισμένης κατάστασης το οποίο κινείται στο εσωτερικό ενός διεγερμένου μέσου (π.χ. αέριο), μπορεί να προκαλέσει αποδιέγερση και εμφάνιση ενός νέου φωτονίου της ίδιας ακριβώς κατάστασης. Οι Schawlow και Townes (1958) ήταν οι πρώτοι που έδειξαν ότι μέσω της προτρεπόμενης εκπομπής, είναι δυνατόν να επιτευχθεί ενίσχυση ακτινοβολίας στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος χρησιμοποιώντας μια κοιλότητα συντονισμού με δύο κάτοπτρα προκειμένου να επιτευχθεί η επιλεκτικότητα των φωτονικών καταστάσεων. Ο πρώτος σε λειτουργία Laser συνεχούς ακτινοβολίας ήταν αυτός από μίγμα He-Ne που προτάθηκε από τους White και Rigden το 1962. Οι μέχρι τότε φωτίζουσες πηγές των συμβολομέτρων ήταν θερμικές. Η πλέον χρησιμοποιούμενη ήταν αυτή της φασματικής λυχνίας του Hg. Με την τοποθέτηση κατάλληλου φίλτρου, επιτρεπόταν η διέλευση της 'πράσινης' γραμμής με μ.κ. $\lambda = 546.1\,\mathrm{nm}$. Τα κύρια μειονεκτήματα μιας τέτοιας πηγής ήταν ο σχετικά χαμηλός βαθμός χρονικής συμφωνίας καθώς και η μικρή φωτίζουσα ισχύς της. Αντίθετα οι πηγές των Laser χαρακτηρίζονται από ιδιότητες όπως: υψηλή χρονική συμφωνία και μονοχρωματικότητα, μεγάλη κατευθυντικότητα καθώς και λαμπρότητα. Η χρησιμοποίησή τους, άλλαξε ριζικά τις προοπτικές της συμβολομετρίας αναδεικνύοντας νέους τομείς εφαρμογών.

Ένας από αυτούς είναι η ***ολογραφία (holography)*** και κατά προέκταση η ***ολογραφική συμβολομετρία (interference holography)***. Η ολογραφία είναι μια ιδιά-

ζουσα μέθοδος απεικόνισης των αντικειμένων στο χώρο. Για την επίτευξη της απαιτούνται δύο στάδια. Αυτό της εγγραφής (μέσω μιας δέσμης αναφοράς και της δέσμης που προέρχεται από το αντικείμενο, σε ειδικό φιλμ), του πλάτους και της φάσης του μετώπου κύματος του αντικειμένου με μορφή συμβολογραφήματος. Σε δεύτερο στάδιο από το εγγεγραμμένο συμβολογράφημα, είναι δυνατόν με κατάλληλο φωτισμό του από την αρχική δέσμη αναφοράς να αναπαραχθεί το μέτωπο κύματος του αντικειμένου. Προπομπό της ολογραφίας αποτέλεσαν οι εργασίες των Wolfke (1920) και Bragg (1933), που αφορούσαν τον τρόπο προσδιορισμού της δομής ενός κρυστάλλου με τη βοήθεια των προτύπων περίθλασης ακτίνων –Χ. Ο πρώτος όμως που μελέτησε διεξοδικά το θέμα ήταν ο Gabor (1948-49). Η πειραματική επιβεβαίωση της θεωρίας του έγινε με φως μιας φασματικής λυχνίας Να η οποία όμως διαθέτει κατά τα γνωστά πολύ μικρό βαθμό χρονικής συμφωνίας περιορίζοντας έτσι σημαντικά τη δυνατότητα συμβολής των δύο ανεξαρτήτων δεσμών. Αλματώδης εξέλιξη της ολογραφίας συντελέσθηκε στη δεκαετία του 1960 και μετά, με την ανακάλυψη και χρήση των πηγών Laser καθώς και την προτεινόμενη από τους Leith και Upatnikes (1964) δυνατότητα ολογραφικής καταγραφής σκεδαζόντων αντικειμένων μεγάλων διαστάσεων. Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές ήταν η ***ολογραφική συμβολομετρία***, η οποία προτάθηκε από πολλές ανεξάρτητες ομάδες επιστημόνων περί το 1965. Επρόκειτο στην πλέον απλή της μορφής για τη συμβολομετρική συσχέτιση δύο μετώπων κύματος τα οποία είχαν εγγραφεί στο ίδιο μέσο σε διαφορετικούς χρόνους. Η ολογραφική συμβολομετρία περιλαμβάνει πλήθος μεθόδων και εφαρμογών οι πιο γνωστές των οποίων είναι στη μηχανική. Π.χ. προσδιορισμός μικρομετατοπίσεων, μικροπεριστροφών, κάμψεων και γενικά παραμορφώσεων διαφόρων σωμάτων.

Παράλληλα με την ανάπτυξη της ολογραφικής συμβολομετρίας ήταν και αυτή της λεγόμενης ***συμβολομετρίας 'speckle'(speckle interferometry)***. Το φαινόμενο 'Speckle' ανάγεται στη μελέτη των στατιστικών ιδιοτήτων του φωτός που παράγεται από διαφόρων ειδών πηγές καθώς και των ιδιοτήτων των επιφανειών μέσω των οποίων ανακλάται ή διαδίδεται. Έτσι η έντονη κοκκίαση όσον (αφορά την ένταση), που παρατηρείται (π.χ. από την ανάκλαση φωτός Laser σε επιφάνειες που ούτως ή άλλως χαρακτηρίζονται από επιφανειακές ανωμαλίες της τάξης του μ.κ. ή μεγαλύτερες), οφείλεται στη συμβολή των διαταραχών που εκπέμπονται από κάθε σημείο των σκεδαστών, στο χώρο μεταξύ της επιφάνειας και του παρατηρητή. Τα αυτά αποτελέσματα παρατηρούνται είτε κατά τη διάδοση των πεδίων στον ελεύθερο χώρο είτε μέσω συστημάτων απεικόνισης. Αν και το φαινόμενο είχε παρατηρηθεί σε παλαιότερη εποχή από τον Exner (1877) η πρώτη θεωρητική στατιστική προσέγγιση έγινε από τον von Laue (1914-16) και αφορούσε την εξήγηση των προτύπων έντασης που παρατηρούνταν κατά τη διέλευση του φωτός ψευδομονοχρωματικής πηγής μέσω σκεδάζοντος μέσου, (π.χ. μια επιφάνεια με τυχαία κατανομή κόκκων λυκοπο-

δίου της τάξης των 30μm)(βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός (Εικ. 7.9.1.5γ,δ). Πρότυπα 'Speckle' από σύμφωνο φως Laser έχουν περιγραφεί συστηματικά για πρώτη φορά από τους Rigden και Gordon (1962) (Εικ. 6.4). Κατ' αρχή το 'Speckle' θεωρούνταν σαν ένας οπτικός θόρυβος, σταδιακά όμως έγινε κατανοητό ότι θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σαν φορέας επεξεργασίας οπτικών πληροφοριών. Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι η συμβολομετρία 'Speckle' (Burch και Tokarsky 1968), που αφορά τον προσδιορισμό μικρομετατοπίσεων, μικροπεριστροφών, παραμορφώσεων καθώς και των τρόπων δόνησης σκεδαζόντων επιφανειών. Ανεξάρτητος κλάδος είναι η αστρική συμβολομετρία 'Speckle' που χρησιμοποιείται για τον καθορισμό αστρικών μεγεθών.



(Εικ. 6.4)

Στη σημερινή εποχή τα ηλεκτρονικά και οι Η/Υ αποτελούν δυναμικά εργαλεία σε συνδυασμό με τη συμβολομετρία. Η απαρχή έγινε με τη χρήση φωτοηλεκτρικών ανιχνευτών στα συμβολόμετρα Fabry – Perot καθώς και των ψηφιακών υπολογιστών στη φασματοσκοπία Fourier. Θα πρέπει επίσης ν' αναφέρουμε ένα νέο κλάδο της συμβολομετρίας μέσω της χρήσης οπτικών ινών μοναδικού τρόπου. Πράγματι, επειδή ο οπτικός δρόμος κατά μήκος μιας ίνας μεταβάλλεται με την πίεση ή την θερμοκρασία, είναι δυνατόν ένα τέτοιο είδος συμβολόμετρου (αντίστοιχου ενός κλασσικού δύο δεσμών αλλά πολύ μεγάλου οπτικού δρόμου) μπορεί να χρησιμεύσει σαν ανιχνευτής υπερυψηλής ευαισθησίας και χαμηλού θορύβου.

6.1 *Χρονική συμφωνία του φωτός*

Όπως ήδη αναφέραμε και στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, η δυνατότητα που έχουν δύο ή περισσότερες δέσμες φωτός ερχόμενες μεταξύ τους σε επαλληλία να συμβάλλουν σε μια περιοχή του χώρου, αφορά το βαθμό συσχετισμού τους. Και ο τελευταίος συνδέεται με τις έννοιες της μερικής συμφωνίας, χρονικής και χωρικής. Η ***χρονική συμφωνία (temporal coherence)*** των δεσμών φωτός, αφορά το φασματικό περιεχόμενό τους που είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με τον τρόπο παραγωγής τους. Π.χ. παραγόμενο φως από: Θερμικές πηγές, πηγές αερίων, πηγές Laser κ.λ.π. Η ***χωρική συμφωνία (spatial coherence)*** των δεσμών φωτός αφορά το μέγεθος και το σχήμα των πηγών από τις οποίες προέρχονται οι συσχετιζόμενες δέσμες. Σε κάθε περίπτωση, οι έννοιες χρονική και χωρική συμφωνία είναι μεταξύ τους αλληλένδετες. Δηλ. ο τελικός βαθμός συμφωνίας των δύο σε επαλληλία δεσμών, είναι συνήθως το γινόμενο μεταξύ του βαθμού χρονικής και του βαθμού χωρικής συμφωνίας.

Στα επόμενα για λόγους διδακτικούς – που στην πράξη είναι κατά προσέγγιση κατορθωτό – μπορούμε να διαχωρίσουμε σε ακραίες περιπτώσεις τους δύο αυτούς παράγοντες, εξετάζοντάς τους ξεχωριστά. Π.χ. αν η πηγή μας είναι σημειακών διαστάσεων, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο βαθμός της χωρικής συμφωνίας τείνει προς τη μονάδα (με κατώτερο όριο αυτό της ασυμφωνίας μεταξύ των δεσμών, με βαθμό που τείνει στο μηδέν). Με δεδομένες αυτές τις συνθήκες, μπορούμε να διαπραγματευτούμε το πρόβλημα της επαλληλίας (και κατά προέκταση της πιθανής συμβολής) δύο έστω προκυπτουσών από τη σημειακή πηγή δεσμών φωτός, με βάση τους όρους που προϋποθέτει η χρονική συμφωνία. Με παρόμοιο τρόπο μια εκτεταμένη ή μεταβαλλόμενων διαστάσεων (π.χ. μια ίριδα που φωτίζεται από το φως ενός Laser) και που εκπέμπει μονοχρωματικό φως, θα έχει βαθμό χρονικής συμφωνίας που τείνει στη μονάδα. Κάτω από αυτές τις συνθήκες η επαλληλία δύο έστω δεσμών (και πιθανόν η συμβολή τους) που θα προκύψουν από μια τέτοιου είδους πηγή, θα αφορά πλέον τη χωρική τους συμφωνία.

Στην παρούσα παράγραφο, θα εξετάσουμε το πρόβλημα της χρονικής συμφωνίας και την επίδρασή του, που αφορά το φαινόμενο της συμβολής μεταξύ των δεσμών του φωτός. Προς την κατεύθυνση αυτή θα βοηθηθούμε από τη μαθηματική θεωρία της χρονικής ανάλυσης κατά Fourier μη περιοδικών συναρτήσεων (στην προκειμένη περίπτωση των κυματοσυρμών του φωτός). Μια σύντομη ανασκόπηση του ζητήματος που αφορά τη χωρική συμφωνία γίνεται στο (ΘΕΜΑ 2) του παρόντος κεφαλαίου μέσω της ανάδειξης του θεωρήματος των Van Cittert-Zernike.

6.1.1 *Μια σύντομη αναφορά στη χρονική ανάλυση κατά Fourier κυματικών μη περιοδικών συναρτήσεων*

Έστω μια κυματική διαταραχή που αντιστοιχεί σ' ένα αρμονικό επίπεδο μέτωπο κύματος διαδιδόμενο κατά τα θετικά του άξονα z. Η τελευταία στη μιγαδική της έκφραση περιγράφεται από τη γνωστή σχέση:

$$\Psi(z,t) = Ae^{i(\omega t - kz)} \tag{6.1.1.1}$$

Όπου με $A =$ σταθ. παριστάνεται το πλάτος του κύματος, με $\omega = 2\pi\nu$ η γωνιακή συχνότητα και με $k = 2\pi/\lambda$ ο κυματάριθμος. ν είναι η συχνότητα του κύματος και λ το μήκος κύματος. Η κυματική διαταραχή $\Psi(z,t)$ στα επόμενα θα αφορά τις διαταραχές $E(z,t)$ της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου (στη βαθμωτή ή διανυσματική του μορφή) και μάλιστα της ορατής περιοχής του Η/Μ φάσματος.

Στην πραγματικότητα όμως όπως είναι γραμμένη η (σχ. 6.1.1.1), παριστάνει ένα κύμα απείρου μήκους και άπειρης διάρκειας. Ειδικότερα για ένα ορισμένο σημείο (έστω το $z = 0$) θα έχουμε για τη χρονική του εξάρτηση:

$$\Psi(z = 0, t) = Ae^{i\omega t} \tag{6.1.1.2}$$

όπου $-\infty < t < \infty$. Δηλ. η διαταραχή στο $z = 0$ θα είναι άπειρης χρονικής διάρκειας. Όμως μια τέτοιου είδους αρμονική διαταραχή δεν μπορεί να συνιστά κανενός είδους πληροφορία. Και η μόνη περίπτωση που θα μπορούσε, θα ήταν μια οποιουδήποτε είδους μεταβολή στο χρονικό της προφίλ. Δηλ. ένα είδος 'παραμόρφωσης' π.χ. του πλάτους της, της φάσης της ή της πόλωσής της. Για να περιγραφεί όμως μια τέτοιου είδους κατάσταση, θα πρέπει να εισαχθούν επί πλέον χρονικές συχνότητες. Δηλ. $\omega_i = 2\pi\nu_i$ $i = 1, 2, 3, ...$ και όχι μόνο η υπάρχουσα, των οποίων η επαλληλία θα μπορούσε να συγκροτήσει ένα οπτικό 'σήμα' δηλ. μια πραγματικά υφιστάμενη Η/Μ διαταραχή.

Επομένως στην πράξη – όπως θα δούμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στην (§ 6.1.2) – οι διαταραχές που αντιμετωπίζουμε είναι χρονικά (και χωρικά βέβαια) πεπερασμένες και συνιστούν αυτό που ονομάζουμε ***κυματοσυρμούς (wave-trains)***. Και θα τους μελετήσουμε με βάση την ανάλυση κατά Fourier από χρονική άποψη. Έστω λοιπόν ένας κυματοσυρμός που δημιουργείται κατά το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ της λειτουργίας μιας πηγής μεταξύ των χρονικών στιγμών t_2, t_1. Ένα σύνηθες παράδειγμα το οποίο ήδη αναφέραμε αρκετές φορές, είναι η παραγωγή φωτός (κυματοσυρμών) κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ της διέγερσης και της απο-

διέγερσης των ατόμων της ύλης. Δηλ. κατά τη μετάβαση των ηλεκτρονίων των εξώτερων στοιβάδων των ατόμων σε διαφορετικές ενεργειακές στάθμες και αντίθετα με αποτέλεσμα την έκλυση αυτής της ενέργειας με τη μορφή του διαδιδόμενου Η/Μ πεδίου των κυματοσυρμών. Στην προκειμένη περίπτωση θα έχουμε την εκπομπή (λόγω της ταλάντωσης του ηλεκτρονικού νέφους) ενός ορισμένου αριθμού περιόδων (της έντασης του Η/Μ πεδίου) διαμορφωμένων από μια περιβάλλουσα οριοθετημένη χρονικά.

Η σπουδαιότητα της μαθηματικής (χρονικής στην προκειμένη περίπτωση) ανάλυσης κατά Fourier αυτού του κυματοσυρμού, είναι ότι μπορεί να συσταθεί από την επαλληλία ενός απείρου (θεωρητικά τουλάχιστον) τον αριθμό αρμονικών χρονικών διαταραχών άπειρης διάρκειας η κάθε μια, με διαφορετικό πλάτος, συχνότητα ή και φάση. οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\Psi(z=0,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (6.1.1.3)$$

Όπου τώρα τα πλάτη $A(\omega)$ κάτω από ορισμένες συνθήκες όπως αποδεικνύεται θα δίνονται από τη σχέση:

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(z=0,t)e^{-i\omega t}dt \qquad (6.1.1.4)$$

και η συνάρτηση $A(\omega)$ συνιστά το λεγόμενο ***μετασχηματισμό Fourier (Fourier transform)*** της συνάρτησης $\Psi(z=0,t)$. Δηλ. οι συναρτήσεις $\Psi(z=0,t)$ (ευθύς χώρος) και $A(\omega)$ (αντίστροφος χώρος), αποτελούν όπως συνήθως ονομάζεται ένα ζεύγος Fourier.

Η $\Psi(z=0,t)$ συνιστά τον ***αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (inverse Fourier transform)*** της συνάρτησης $A(\omega)$. Στα επόμενα για λόγους συντομίας και μαθηματικής προσαρμογής, θα συμβολίζουμε τη χρονική συνάρτηση $\Psi(z=0,t)$ με την $f(t)$ και την $A(\omega)$ με την $F(\omega)$. Δηλ. τελικά:

$$F(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (6.1.1.5)$$

είναι ο μετ. Fourier της συνάρτησης $f(t)$ και

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (6.1.1.6)$$

είναι ο αντίστροφος μετ. Fourier της $F(\omega)$. Η συνθήκη από μαθηματική άποψη για την ύπαρξη του μετ. Fourier είναι η* :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty \qquad (6.1.1.7)$$

Δηλ. η $f(t)$ θα πρέπει να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Στη γενικότερη περίπτωση η συνάρτηση $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ είναι μιγαδική οπότε:

$$F(\omega) = R(\omega) + \iota X(\omega) = |F(\omega)|e^{i\phi(\omega)} \qquad (6.1.1.8)$$

Η $|F(\omega)|$ ονομάζεται ***φάσμα του μέτρου (magnitude spectrum)*** της $f(t)$ ενώ η $\phi(\omega)$ ***φάσμα της φάσης (phase spectrum)***. Στα επόμενα οι συναρτήσεις των οποίων θα υπολογίσουμε τους μετ. Fourier θα είναι πραγματικές. Κάτω από αυτές τις συνθήκες και με βάση τη (σχ. 6.1.1.8) αποδεικνύονται οι εξής ιδιότητες:

$$R(-\omega) = R(\omega),\ \ X(-\omega) = -X(\omega),\ \ F(-\omega) = F^*(\omega) \qquad (6.1.1.9)$$

όπου $F^*(\omega)$ η μιγαδική συζυγής της $F(\omega)$.

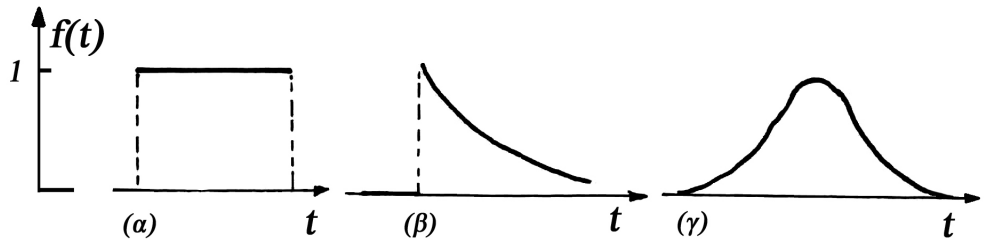
6.1.2 *Ημικλασσική περιγραφή του Η/Μ πεδίου. Μήκος συμφωνίας και χρόνος συμφωνίας*

Παλμοί και κυματοσυρμοί

Παλμό (pulse) ονομάζουμε μία Η/Μ διαταραχή η οποία διαδίδεται στο χώρο και η οποία προέκυψε κατά τη διάρκεια στιγμιαίας λειτουργίας μιας πηγής. Αν τον δούμε σαν Η/Μ κύμα, ο παλμός επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση του Maxwell μόνο που είναι εντοπισμένος χωρικά και χρονικά σε αντιδιαστολή με τα γνωστά αρμονικά κύματα τα οποία θεωρήσαμε σαν απείρου μήκους και διάρκειας. Τα τελευταία, όπως ήδη αναφέραμε, δεν υφίστανται στην πραγματικότητα και δεν αντι-

* H.P. HSU: 'Fourier Analysis' Simon and Schuster (Tech Outlines) N.Y. (1970). (Ch. 4.3).

προσωπεύονται σε φυσικές διεργασίες παραγωγής και διάδοσης. Βασικός λόγος είναι κατά τα γνωστά, οι οριακές συνθήκες που τίθενται εξ αιτίας του τρόπου λειτουργίας των πηγών εκπομπής. Π.χ. ένας εκπομπός Η/Μ κυμάτων, ανεξάρτητα του είδους και του τρόπου λειτουργίας του, αρχίζει να εκπέμπει μια ορισμένη χρονική στιγμή, οριακή συνθήκη που είναι αδύνατον ν' αποφευχθεί. Για το λόγο αυτό, οι υφιστάμενες φυσικές διεργασίες εκπομπής – ειδικότερα στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος – οδηγούν σε διαταραχές που περιγράφουν Η/Μ παλμούς πεπερασμένου μήκους και διάρκειας. Η μορφολογία τριών από αυτούς φαίνεται στα (Σχ. 6.1.2.1). Ο του (Σχ. 6.1.2.1α) αντιστοιχεί σε τετραγωνικό παλμό που αν θεωρήσουμε ότι το πλάτος του είναι μονάδα και το εύρος του ίσο με τ θα περιγράφεται από

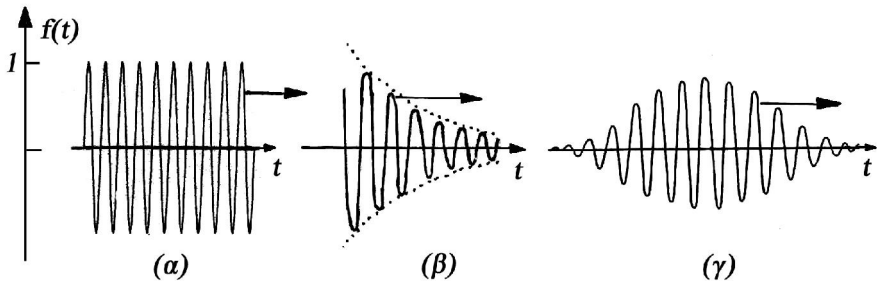


(Σχ. 6.1.2.1)

τη γνωστή συνάρτηση: $f(t)=1$ για $|t|<\tau/2$ και $f(t)=0$ για $|t|>\tau/2$. Ο παλμός του (Σχ. 6.1.2.1β) συνιστά αποσβενύμενη διαταραχή και μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση: $f(t)=e^{-at}$ για $t>0$ και $f(t)=0$ για $t<0$. Ο του (Σχ. 6.1.2.1γ) είναι ένας παλμός γκαουσιανής μορφής και αν υποθέσουμε ότι το μέγιστο πλάτος του είναι ίσο με τη μονάδα μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση: $f(t)=e^{-at^2}$ για $a>0$.

Συνήθως όμως η διαδικασία της εκπομπής συντελείται μέσω ταλάντωσης των διαφόρων ειδών ηλεκτρικών διπόλων. Π.χ. διεγειρόμενο και αποδιεγειρόμενο άτομο εκπέμπει ακτινοβολία κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του ηλεκτρονικού του νέφους σε σχέση με τον θετικό πυρήνα. Οι προαναφερόμενες ταλαντώσεις είναι ως επί το πλείστον αρμονικής μορφής, άρα τέτοιο θα είναι και το εκπεμπόμενο Η/Μ κύμα με τους γνωστούς όμως χωροχρονικούς περιορισμούς. Τις Η/Μ διαταραχές αυτού του είδους ήταν που ονομάσαμε ***κυματοσυρμούς (wavetrains).*** Τρεις μορφές τους μπορούμε να δούμε στα (Σχ. 6.1.2.2). Ένα βασικό χαρακτηριστικό που γίνεται αμέσως εμφανές σε σύγκριση με τις μορφές των παλμών των (Σχ. 6.1.2.1), είναι ότι η μορφολογία των κυματοσυρμών καθορίζεται από τη διαμόρφωση μιας αρμονικής (συνημιτονικής) διαταραχής μέσω μιας περιβάλλουσας που αντιπροσωπεύει το προφίλ των παλμών. Η μορφολογία αυτή έχει συγκεκριμένη φυσική σημασία και ο προσδιορισμός της μας δίνει πληροφορίες για τον τρόπο εκπο-

μπής καθώς και για τα φαινόμενα που τον επηρεάζουν. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι η διαταραχή είναι σταθερού πλάτους, τότε παριστάνουμε τον κυματοσυρμό χωρικά ή χρονικά όπως φαίνεται στο (Σχ. 6.1.2.2α). Ο κυματοσυρμός θα έχει μικρότερο μήκος (ή μικρότερη χρονική διάρκεια) εφόσον θεωρήσουμε ότι η εκπομπή του διακόπτεται από τη σύγκρουση του ατόμου με άλλο άτομο. Το προαναφερόμενο μοντέλο είναι αρκετά απλουστευτικό αν και θα το χρησιμοποιήσουμε όπως θα δούμε στα επόμενα, για να βγάλουμε ορισμένα σημαντικά συμπεράσματα όσον αφορά το



(Σχ. 6.1.2.2)

φασματικό εύρος της εκπεμπόμενης διαταραχής. Μια πιο ρεαλιστική μορφή κυματοσυρμού, είναι αυτή που προκύπτει μέσω μιας αποσβενύμενης ταλάντωσης του διπόλου ηλεκτρονικού νέφους - πυρήνα (Σχ. 6.1.2.2β). Η εκκίνηση της ταλάντωσης γίνεται από τη στιγμή που το άτομο είναι ήδη σε κατάσταση διέγερσης. Πλήρη ανάλυση αυτής της περίπτωσης γίνεται στην (Άσκ. 1: Λυμένη). Τελικά όμως, όπως θ' αποδείξουμε στα επόμενα, η πλέον αποδεκτή μορφή κυματοσυρμού, η οποία αναδεικνύεται με τη βοήθεια πειραματικών δεδομένων, είναι αυτή του (Σχ. 6.1.2.2γ). Πρόκειται για μια αρμονική διαταραχή, διαμορφωμένη από περιβάλλουσα γκαουσιανής μορφής (Άσκ. 2: Λυμένη).

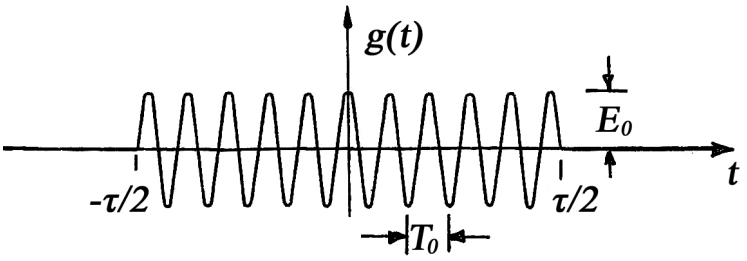
Θα ήταν αρχικά ιδιαίτερα ενδιαφέρον να καθορίσουμε το συχνοτικό περιεχόμενο (φάσμα Fourier) ενός αρμονικού κυματοσυρμού πεπερασμένου εύρους, σταθερού πλάτους και δεδομένης περιόδου. Επιλέγουμε για την ανάλυσή μας τη χρονική του περιγραφή οπότε: ο κυματοσυρμός χρονικής διάρκειας (εύρους) $\tau[\mathrm{s}]$, πλάτους $E_0[\mathrm{V/m}]$ και συχνότητας $\nu_0 = 2\pi/T_0[\mathrm{Hz}]$ θα περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$g(t) = \begin{cases} E_0 \cos\omega_0 t & |t| \le \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases} \qquad (6.1.2.1)$$

και του οποίου η μορφή δίνεται στο (Σχ. 6.1.2.3). Για τον υπολογισμό του φάσματος συχνοτήτων $G(\omega)$ (ή $G(\nu)$) δηλ. του μετασχηματισμού Fourier της $g(t)$ θα

πρέπει πρώτα ν' αποδείξουμε την εξής ιδιότητας: Εφόσον η ω_0 είναι μία πραγματική σταθερή και $F(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}$ τότε θα ισχύει:

$$\mathcal{F}\left\{f(t)e^{i\omega_0 t}\right\}=F(\omega-\omega_0) \tag{6.1.2.2}$$



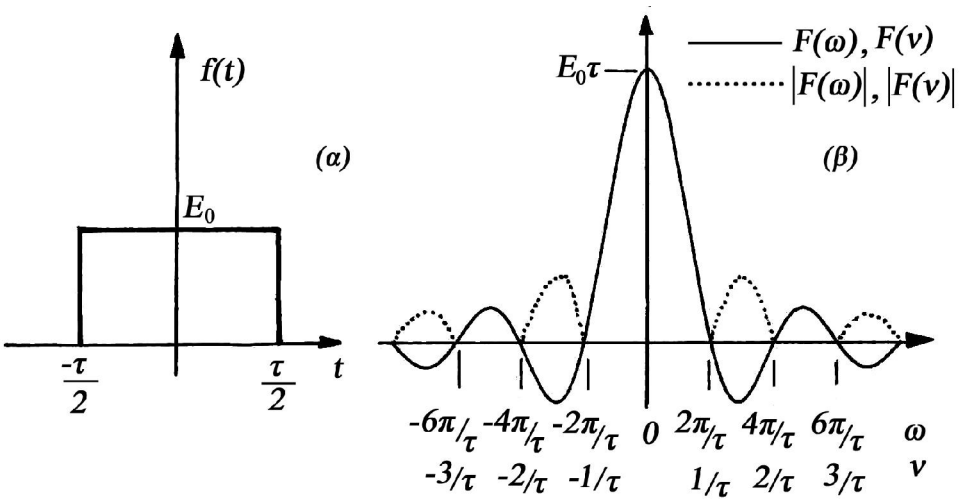
(Σχ. 6.1.2.3)

Πράγματι: $\mathcal{F}\left\{f(t)e^{i\omega_0 t}\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega_0 t}e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=F(\omega-\omega_0)$

Στην προκειμένη περίπτωση η *f(t)* είναι η τετραγωνική συνάρτηση:

$$f(t)=\begin{cases}E_0 & |t|\le \tau/2\\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases} \tag{6.1.2.3}$$

(Σχ. 6.1.2.4α), της οποίας ο μετ. Fourier θα δίνεται από τη σχέση:



(Σχ. 6.1.2.4)

$$F(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E_0 e^{-i\omega t}dt=$$

$$\frac{E_0}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=\frac{E_0}{i\omega}\left[e^{i\omega(\tau/2)}-e^{-i\omega(\tau/2)}\right]=\frac{2E_0}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

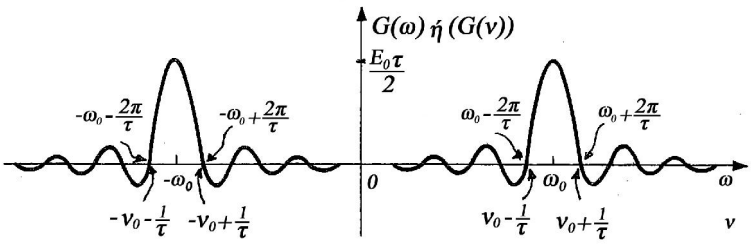
και τελικά: $$F(\omega)=E_0\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \qquad (6.1.2.4)$$

Και αν η $F(\omega)$ γραφεί συναρτήσει της συχνότητας ν με βάση τη σχέση $\omega=2\pi\nu$, θα πάρει τη μορφή:

$$F(\nu)=E_0\tau\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau} \qquad (6.1.2.5)$$

Στο (Σχ. 6.1.2.4β) μπορούμε να δούμε τη γραφική παράσταση της $F(\omega)$ (ή της $F(\nu)$) (συνεχής γραμμή) και της $|F(\omega)|$ (ή της $|F(\nu)|$) (διακεκομμένη γραμμή).
Όμως: $\cos(\omega_0 t)=(1/2)\left[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right]$, οπότε ο μετ. Fourier της $g(t)$ θα είναι:

$$\mathcal{F}\{g(t)\}=G(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\cos\omega_0 t\}=\left\{\frac{1}{2}f(t)e^{i\omega_0 t}+\frac{1}{2}f(t)e^{-i\omega_0 t}\right\}=$$
$$\frac{1}{2}\mathcal{F}\{f(t)e^{i\omega_0 t}\}+\frac{1}{2}\mathcal{F}\{f(t)e^{-i\omega_0 t}\}=\frac{1}{2}F(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}F(\omega+\omega_0) \qquad (6.1.2.6)$$



(Σχ. 6.1.2.5)

Επειδή όμως: $F(\omega)=E_0\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$ ή $F(\nu)=E_0\tau\frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}$ (σχ. 6.1.2.4,5)

θα έχουμε τελικά:

$$G(\omega)=\mathcal{F}\{g(t)\}=\mathcal{F}\{f(t)\cos\omega_0 t\}=\frac{E_o\tau}{2}\frac{\sin\frac{(\omega-\omega_o)\tau}{2}}{\frac{(\omega-\omega_o)\tau}{2}}+\frac{E_o\tau}{2}\frac{\sin\frac{(\omega+\omega_o)\tau}{2}}{\frac{(\omega+\omega_o)\tau}{2}} \qquad (6.1.2.7)$$

ή συναρτήσει της συχνότητας ν:

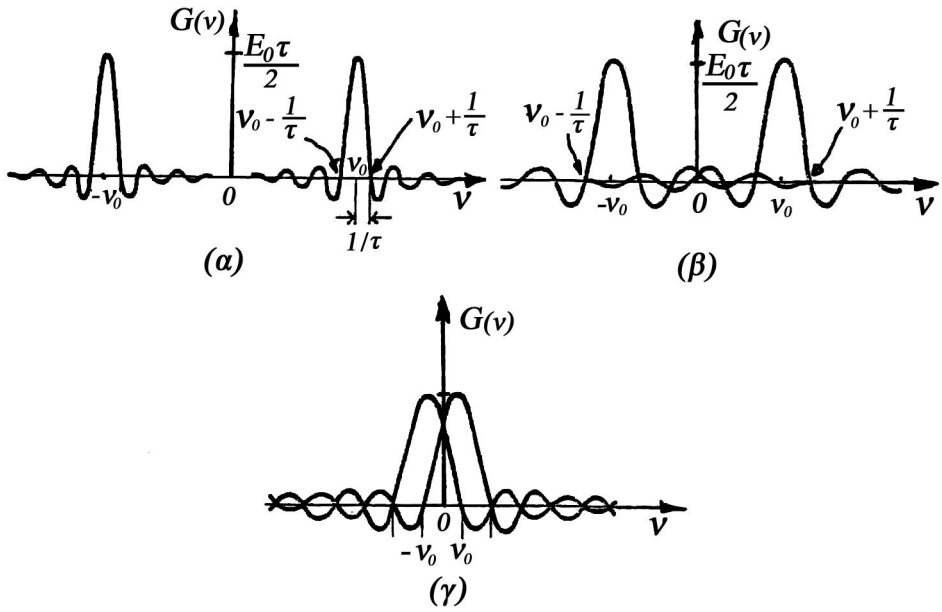
$$G(\nu)=\frac{E_o\tau}{2}\frac{\sin\pi(\nu-\nu_o)\tau}{\pi(\nu-\nu_o)\tau}+\frac{E_o\tau}{2}\frac{\sin\pi(\nu+\nu_o)\tau}{\pi(\nu+\nu_o)\tau} \qquad (6.1.2.8)$$

Τη γραφική παράσταση των (σχ. 6.1.2.7,8) βλέπουμε στο (Σχ. 6.1.2.5). Παρατηρούμε ότι αποτελείται από δύο πανομοιότυπους κλάδους της συμμετρικής συνάρτησης $\sin c(\omega)$ (Σχ. 6.1.2.4β) με μετατοπισμένα όμως τα κέντρα τους στις συχνότητες ω_0 και $-\omega_0$ (ή ν_0 και $-\nu_0$). Ο πλήρης διαχωρισμός των δύο κλάδων της (σχ. 6.1.2.8) δεν είναι δεδομένος*, αλλά εξαρτάται από τον αριθμό των περιόδων της συνημιτονικής διαταραχής στο εσωτερικό του τετραγωνικού παλμού (Σχ. 6.1.2.3). Όταν ομιλούμε για πλήρη διαχωρισμό, θεωρούμε ότι ισχύει το εξής: Οι τιμές του δευτέρου προσθετέου της (σχ. 6.1.2.8), που αντιστοιχεί στον κλάδο της $F(\nu)$ που επικεντρώνεται στη συχνότητα $-\nu_0$ για την περιοχή που αναπτύσσεται ο πρώτος κλάδος της (πρώτος προσθετέος της (σχ. 6.1.2.8)), είναι αμελητέες. Δηλ. η πρόσθεση των τιμών της $\sin\pi(\nu+\nu_o)\tau/\pi(\nu+\nu_o)\tau$, στις περιοχές που οι τιμές της $\sin\pi(\nu-\nu_o)\tau/\pi(\nu-\nu_o)\tau$ είναι σημαντικές, είναι πάρα πολύ μικρές με συνέπεια να μην επηρεάζουν τα μορφολογικά χαρακτηριστικά της δεύτερης.

Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το γινόμενο $\nu_0\tau$ να είναι πολύ μεγάλος αριθμός. Επειδή όμως $\nu_0=1/T_0 \Rightarrow \nu_0\tau=\tau/T_0$ όπου τ: η χρονική διάρκεια του κυματοσυρμού και T_0 η περίοδος του αρμονικού κύματος. Οπότε για να ισχύει ο πλήρης διαχωρισμός των δύο κλάδων της (σχ. 6.1.2.8) θα πρέπει ο αριθμός των περιόδων τ/T_0 που περιλαμβάνεται στον κυματοσυρμό να είναι αντίστοιχα πολύ μεγάλος. Τότε η γραφική παράσταση της (σχ. 6.1.2.8) είναι αυτή του (Σχ. 6.1.2.6α). Ας υποθέσουμε τώρα ότι η διάρκεια τ του κυματοσυρμού ελαττώνεται ενώ η $\nu_0=1/T_0$ παραμένει σταθερή. Τότε τα πρώτα ελάχιστα (όπως και τα υπόλοιπα), απομακρύνονται από τα σημεία $\pm\nu_0$ δηλ. από τις θέσεις όπου επικεντρώνονται οι δύο κλάδοι της (σχ. 6.1.2.6). Σαν συνέπεια, όπως φαίνεται στο (Σχ. 6.1.2.6β), οι τιμές του κλά-

* R. D. Stuart: 'An Introduction to Fourier Analysis'. Methuen & Co LTD and science paperbacks. London (1961) (Ch. 4).

δου της καμπύλης της επικεντρωμένης στο $-\nu_0$, επηρεάζουν (αθροιζόμενες) τις τιμές του κλάδου της καμπύλης στο ν_0.



(Σχ. 6.1.2.6)

Το αποτέλεσμα θα είναι η αλλαγή της μορφολογίας της καμπύλης σε σχέση με αυτήν που εμφανιζόταν αρχικά στο (Σχ. 6.1.2.6α). Τέλος ας υποθέσουμε ότι η διάρκεια τ του κυματοσυρμού παραμένει σταθερή αλλά ελαττώνεται η ν_0 (ή αντίστοιχα αυξάνεται η περίοδος T_0). Τότε οι θέσεις των ελαχίστων παραμένουν σταθερές όμως οι δύο κλάδοι της καμπύλης της (σχ. 6.1.2.8) μετακινούνται σαν όλο η μία προς την άλλη όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο (Σχ. 6.1.26γ). Και εδώ βλέπουμε ότι οι τιμές του ενός κλάδου του επικεντρωμένου στη $-\nu_0$ επηρεάζουν δραστικά αυτές του κλάδου στη θέση ν_0. Με τον ίδιο τρόπο η άθροισή τους (δηλ. η (σχ. 6.1.2.8) θα μας δώσει τελικά μια καμπύλη που δεν θα έχει σχέση με αυτήν που εμφανίζεται στο (Σχ. 6.1.2.6α).

Για ακτινοβολία που εκπέμπεται στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος από θερμικές πηγές, (δηλ. όχι πηγές Laser), οι κυματοσυρμοί που την συνθέτουν, έχουν διάρκεια – όπως ήδη αναφέραμε – περίπου $\tau = 10^{-8}\,\mathrm{s}$. Επίσης η συχνότητα των διαταραχών για τη μέση περιοχή του φάσματος είναι της τάξης του $\nu_0 = 10^{14}\,\mathrm{Hz}$. Με βάση αυτά τα δεδομένα, το γινόμενο $\nu_0\tau = \tau/T_0 = 10^{-8}/10^{-14} = 10^6$ θα είναι κατά τα γνωστά ο αριθμός των περιόδων που περιλαμβάνονται στη χρονική διάρκεια τ του κυματοσυρμού. Όπως βλέπουμε ο αριθμός αυτός είναι πάρα πολύ μεγάλος με συνέπεια η φασματική μορφή των προαναφερόμενων κυματοσυρμών ν' αποτελείται

από δύο σαφώς διαχωρισμένους κλάδους, επικεντρωμένους στις συχνότητες $-\nu_0, \nu_0$ όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στο (Σχ. 6.1.2.5).

Το εύρος της ζώνης συχνοτήτων

Η (σχ. 6.1.2.8) μας δίνει στην πραγματικότητα την κατανομή των πλατών των διαφορετικών συνιστωσών συχνοτήτων της $g(t)$, που εκφράζεται από τη (σχ. 6.1.2.1) και παριστάνει ένα αρμονικό κυματοσυρμό πλάτους E_0 περιόδου T_0 και χρονικής διάρκειας τ. Με την προϋπόθεση ότι η $g(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση (γεγονός που ισχύει) και το ότι ο αριθμός των περιόδων στη διάρκεια του κυματοσυρμού είναι πολύ μεγάλος (γεγονός που επιβεβαιώσαμε προηγουμένως), θα αποδείξουμε μια θεμελιώδη σχέση που υφίσταται μεταξύ του λεγόμενου εύρους $\Delta\nu$ των συχνοτήτων του κυματοσυρμού και της χρονικής του διάρκειας τ.

Επειδή $\omega = 2\pi\nu$, τα ζεύγη Fourier που μας δίνουν οι (σχ. 6.1.1.5,6) μπορούν να γραφούν:

$$G(\nu) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i\nu t} dt \qquad (6.1.2.9)$$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\nu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{2\pi i\nu t} d\nu \qquad (6.1.2.10)$$

Και με το δεδομένο ότι το φάσμα $G(\nu)$ του κυματοσυρμού είναι γνωστό (σχ. 6.1.2.8), με τη βοήθεια της (σχ. 6.1.2.10) ο κυματοσυρμός $g(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{2\pi i\nu t} d\nu \qquad (6.1.2.11)$$

Με βάση όμως τις (σχ. 6.1.1.9), επειδή η $g(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση θα ισχύει: $G(-\nu) = G^*(\nu)$. Οπότε αν θέσουμε:

$$G(\nu) = \frac{1}{2} a(\nu) e^{i\theta(\nu)} \qquad (6.1.2.12)$$

η (σχ. 6.1.2.11) γίνεται:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}a(\nu)e^{i\theta(\nu)}\,e^{2\pi i\nu t}d\nu=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}a(\nu)e^{i\theta(\nu)}\,e^{2\pi i\nu t}d\nu+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}a(\nu)e^{i\theta(\nu)}\,e^{2\pi i\nu t}d\nu=$$

$$-\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}a(-\nu)e^{i\theta(-\nu)}\,e^{-2\pi i\nu t}d(-\nu)+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}a(\nu)e^{i\theta(\nu)}\,e^{2\pi i\nu t}d\nu=$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}a(-\nu)e^{i\theta(-\nu)}\,e^{-2\pi i\nu t}d(\nu)+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}a(\nu)e^{i\theta(\nu)}\,e^{2\pi i\nu t}d\nu$$

και επειδή: $G(-\nu)=G^{*}(\nu)$ δηλ. : $(1/2)a(-\nu)e^{i\theta(-\nu)}=(1/2)a(\nu)e^{-i\theta(\nu)}$

$$g(t)=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}a(\nu)e^{-i\theta(\nu)}\,e^{-2\pi i\nu t}d\nu+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}a(\nu)e^{i\theta(\nu)}\,e^{2\pi i\nu t}d\nu=$$

$$\int_{0}^{\infty}a(\nu)\left[\left\{e^{i\left[2\pi\nu t+\theta(\nu)\right]}+e^{-i\left[2\pi\nu t+\theta(\nu)\right]}\right\}\Big/2\right]d\nu$$

οπότε: $$g(t)=\int_{0}^{\infty}a(\nu)\cos\left[2\pi\nu t+\theta(\nu)\right]d\nu \qquad (6.1.2.13)$$

Η (σχ. 6.1.2.13) παριστάνει τον κυματοσυρμό κατ' ευθείαν σαν την επαλληλία αρμονικών κυμάτων πλάτους $a(\nu)$ και φάσης $\theta(\nu)$. Το μιγαδικό πλάτος ενός τέτοιου κύματος είναι: $a(\nu)e^{i\theta(\nu)}$ οπότε από τη (σχ. 6.1.2.12) το μέγεθος $a(\nu)e^{i\theta(\nu)}=2G(\nu)$ για θετικές μόνο πλέον τιμές του ν μας δίνει το μιγαδικό πλάτος της συνιστώσας ν. Με την προηγούμενη ανάλυση κατορθώσαμε να εκφράσουμε την $g(t)$ με τέτοιο τρόπο ώστε το συχνοτικό της περιεχόμενο να ανήκει στο διάστημα $0<\nu<\infty$ δηλ. οι ν να είναι θετικές. Τότε η ενέργεια που συνδέεται με τη συνιστώσα Fourier συχνότητας ν (βλ. επόμενη σημείωση), δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon(\nu)=a(\nu)e^{i\theta(\nu)}a(\nu)e^{-i\theta(\nu)}=\left[a(\nu)\right]^{2}=\left\{2G(\nu)\right\}\cdot\left\{2G^{*}(\nu)\right\}=\left|2G(\nu)\right|^{2} \qquad (6.1.2.14)$$

όπου ξανά πρόκειται να θεωρηθούν θετικές τιμές για τις συχνότητες ν. Επομένως ο όρος της $G(\nu)$ που αφορά θετικές μόνο συχνότητες είναι ο πρώτος προσθετέος της (σχ. 6.1.2.8) η οποία όπως ήδη αποδείξαμε για $\nu_0\tau\gg$ έχει τη μορφή $\sin c$ συνάρτησης η οποία φαίνεται στη θετική περιοχή συχνοτήτων του (Σχ. 6.1.2.5). Άρα με βάση το θεώρημα του Parseval, το ενεργειακό περιεχόμενο όλων των συνιστωσών του

κύματος θα δίνεται από το ολοκλήρωμα του τετραγώνου του μέτρου της:

Σημείωση

Το περιεχόμενο ισχύος μιας μη περιοδικής συνάρτησης.
(Θεώρημα του Parseval)

Το ***περιεχόμενο ισχύος (power content)*** μιας μη περιοδικής συνάρτησης $f(t)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \tag{6.1.2.15}$$

Αν π.χ. η $f(t)$ παριστάνει την ένταση του ρεύματος $I(t)$ που διαρρέει μια αντίσταση $R = 1$ Ohm σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Τότε με βάση τη σχέση: $E = \int I^2 R dt$ η E θα παριστάνει την ενέργεια που καταναλώνεται από την τροφοδοτούσα πηγή στην αντίσταση R μέσα σ' ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Μπορεί ν' αποδειχθεί με όχι δύσκολο τρόπο ότι δύο συναρτήσεις $f_1(t)$ και $f_2(t)$ για τις οποίες $F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}$ και $F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$ επαληθεύουν τη σχέση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) f_2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega \tag{6.1.2.16}$$

Αν επίσης υποθέσουμε ότι οι $f_1(t)$ και $f_2(t)$ είναι πραγματικές τότε θα ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) d\omega \tag{6.1.2.17}$$

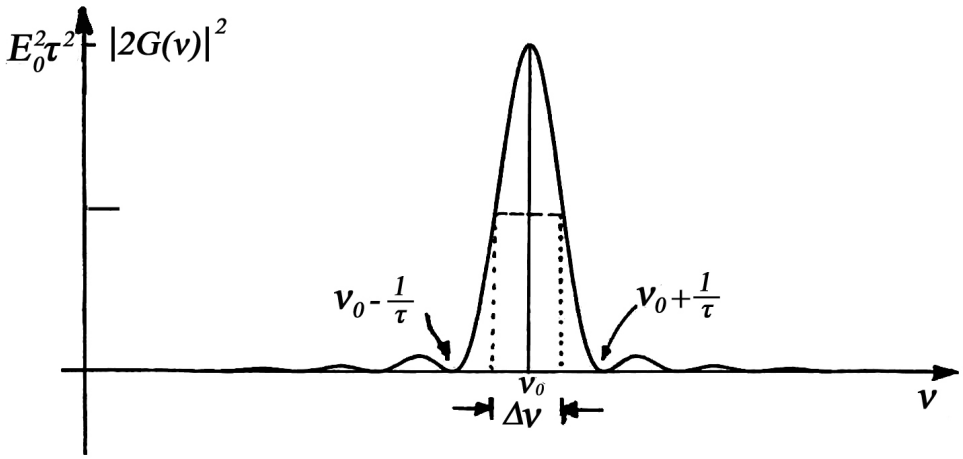
Και αν επιπλέον οι $f_1(t)$ και $f_2(t)$ είναι πραγματικές και ίσες μεταξύ τους και $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ τότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \tag{6.1.2.18}$$

που συνιστά την έκφραση του θεωρήματος του Parseval για μια μη περιοδική πραγματική συνάρτηση $f(t)$. Η (σχ. 6.1.2.18) εκφράζει το γεγονός ότι το ενεργειακό περιεχόμενό της $f(t)$ δίνεται από το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $|F(\omega)|^2$ (το τετράγωνο του μέτρου του φάσματος της $f(t)$) πολλαπλασιαζόμενο επί τον παράγοντα $1/2\pi$. Η συνάρτηση $|F(\omega)|^2$ ονομάζεται ***ενεργειακό φάσμα (energy spectrum)*** της $f(t)$.

$$|2G(\nu)|^2 = E(\nu) = E_0^2\tau^2\left\{\frac{\sin\pi(\nu-\nu_0)\tau}{\pi(\nu-\nu_0)\tau}\right\}^2 \qquad (6.1.2.19)$$

της οποίας η μορφή δίνεται στο (Σχ. 6.1.2.7). Πρακτικά το μεγαλύτερο μέρος αυτής της ενέργειας, περικλείεται μέσα στην περιοχή συχνοτήτων $\nu_0 \pm 1/\tau$. Συμβατικά ό-



(Σχ. 6.1.2.7)

μως, το μισό αυτού του εύρους σχετίζεται τελικά με τη διάρκεια εκπομπής τ του κυματοσυρμού. Τα πρώτα μηδενικά ελάχιστα της $|2G(\nu)|^2 = E(\nu)$ βρίσκονται για $\pi(\nu-\nu_0)\tau = m\pi$ όπου $m = \pm 1$. Επομένως το εύρος μεταξύ των δύο πρώτων ελαχίστων θα είναι $2/\tau$ οπότε $(2/\tau) = 2\Delta\nu$ ή:

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau} \qquad (6.1.2.20)$$

Πρόκειται για μια σημαντική σχέση, η οποία από φυσική άποψη εκφράζει το γεγονός ότι αν το ***φασματικό εύρος (bandwidth)*** $\Delta\nu$ ***(ή ζώνη συχνοτήτων)*** είναι πολύ μικρό, τότε οι κυματοσυρμός εκτείνεται για μεγάλο χρονικό διάστημα δηλ. η χρονική του διάρκεια τ είναι μεγάλη όπως και το αντίστροφο. Ο χρόνος $\tau = (\tau_{coherence}) = \tau_c$ ονομάζεται ***χρόνος συμφωνίας (coherence time)***. Από φυσική άποψη είναι το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο η φάση του κύματος είναι σαφώς καθορισμένη ή η διαφορά φάσης μεταξύ δύο χρονικών στιγμών που διαφέρουν λιγότερο από τ_c είναι σταθερή.

Αφού η διαταραχή (ο κυματοσυρμός) εγκαταλείψει την πηγή, διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon = c/n$ όπου c: η ταχύτητα του φωτός στο κενό και n: ο δ.δ. του μέσου διάδοσης. Ο κυματοσυρμός του οποίου η εκπομπή διήρκεσε χρονικά κατά τ_c, έχει μήκος το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$l_c = \upsilon \cdot \tau_c \qquad (6.1.2.21)$$

Με βάση τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής γνωρίζουμε ότι: $\upsilon = \lambda\nu$, όπου λ: το μ.κ. του και ν η συχνότητα. Από την τελευταία σχέση διαφορίζοντας θα έχουμε:

$$\nu = \upsilon/\lambda \;\Rightarrow\; \Delta\nu = -\frac{\upsilon}{\lambda^2}\Delta\lambda = \left(\Delta\nu = \frac{1}{\tau_c}\right) = \frac{1}{\tau_c} = (\text{σχ. } 6.1.2.21) = \frac{\upsilon}{l_c} \quad \text{οπότε:}$$

$$l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \qquad (6.1.2.22)$$

όπου τώρα $\Delta\lambda$ είναι το φασματικό εύρος σε μ.κ. που αντιστοιχεί σε εύρος συχνοτήτων $\Delta\nu$ και λ το μ.κ. που αντιστοιχεί στη συχνότητα ν. Το μήκος $l = l_c$ όπως εκφράζεται από τις (σχ. 6.1.2.21,22) ονομάζεται ***μήκος συμφωνίας (coherence length)*** και από φυσική άποψη εκφράζει το χωρικό διάστημα μέσα στο οποίο η φάση του κύματος είναι σαφώς καθορισμένη ή η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων που διαφέρουν λιγότερο από l_c είναι σταθερή. Π.χ. για τους κυματοσυρμούς που εκπέμπονται στην περιοχή $\lambda = 546.1\text{nm}$ (ψευδομονο-χρωματικό φως της πράσινης γραμμής της λυχνίας του Hg), το μετρούμενο φασματικό εύρος είναι $\Delta\lambda = 1\text{nm}$ (Πίν. 6.1.2.11). Τότε με τη βοήθεια της (σχ, 6.1.2.22) βρίσκουμε ότι το μήκος συμφωνίας θα είναι $l_c \simeq 0.3\text{mm}$. Ο χρόνος συμφωνίας τ_c, όπως και το μήκος συμφωνίας l_c, παίζουν καθοριστικό ρόλο στις διεργασίες συσχετισμού των κυμάτων και συνιστούν το κριτήριο, προκειμένου τα τελευταία να συμβάλλουν ή όχι.

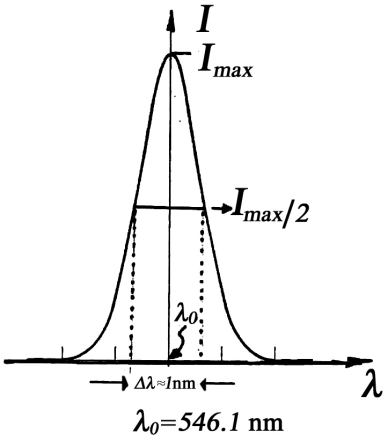
Σχέση μεταξύ του φάσματος (του συχνοτικού περιεχομένου) ενός κυματοσυρμού και του φάσματος της αντίστοιχης έντασης της ακτινοβολίας του. Ψευδομονοχρωματικό φως

Ψευδομονοχρωματικό φως είναι αυτό που πρακτικά εκπέμπεται κυρίως από τις φασματικές λυχνίες (με τις ποικίλες γραμμές εκπομπής) (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός (§ 4.4.4)) και το φασματικό τους εύρος είναι αρκετά στενό $\Delta\lambda \simeq 1\text{nm}$. Σαν τέτοιο, αναφέρουμε το φως που μας δίνει η πράσινη γραμμή της λυχνίας Hg ή η κίτρινη της αντίστοιχης του Να. Αν μια τέτοια ακτινοβολία προσπέσει στην είσοδο ενός αναλυτικού οργάνου (π.χ. φασματοσκοπίου ή φασματογράφου, εκτελείται με τη βοήθεια φραγμάτων ή πρισμάτων ανάλυση της ακτινοβολίας σε σχέση με το μ.κ. ή την συχνότητα. Δηλ. στην έξοδο του οργάνου μέσω ενός ραδιομετρικού ανιχνευτή, θα καταγραφεί μια κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας της μορφής του (Σχ. 6.2.1.8). Η τελευταία συνιστά το ενεργειακό φάσμα της συγκεκριμένης ακτινοβολίας, με την ένταση του φωτός μετρείται σε μονάδες ισχύος ανά επιφάνεια. Το καταγραφόμενο όμως ενεργειακό φάσμα, αφορά την ένταση της ακτινοβολίας την προερχόμενη από την πηγή και όχι το ενεργειακό φάσμα ενός από τους κυματοσυρμούς που αποτελεί μονάδα του στατιστικού συνόλου των κυματοσυρμών από τους οποίους συγκροτείται η δέσμη.

Γνωρίζουμε όμως ότι μια τέτοια δέσμη συντίθεται από ένα τεράστιο πλήθος κυματοσυρμών. Οπότε το ζήτημα το οποίο τίθεται είναι, αν είναι δυνατόν μέσω των γνωστών πειραματικών δεδομένων που σχετίζονται με τον ενεργειακό της φάσμα, να εξαχθούν συμπεράσματα όσον αφορά το ενεργειακό φάσμα των κυματοσυρμών που την απαρτίζουν και κατά προέκταση της μορφολογίας των ίδιων των κυματοσυρμών (του προφίλ τους). Στην επίλυση του προβλήματος θα βοηθηθούμε τα μέγιστα από τα συμπεράσματα της ανάλυσης κατά Fourier.

Η ανάλυση των πειραματικών δεδομένων και συγκεκριμένα του ενεργειακού φάσματος της ακτινοβολίας (μιας γραμμής της) που προέρχεται από μια πηγή που εκπέμπει ψευδομονοχρωματικό φως, μας οδηγεί στο να συμπεράνουμε ότι η κατανομή της έντασης I (Σχ. 6.1.2.8), είναι γκαουσιανής μορφής. Διαπιστώνουμε ότι η μεγαλύτερη ποσότητα του εκπεμπόμενου φωτός περιορίζεται σε μια σχετικά μικρή φασματική περιοχή γύρω από ένα μέσο μ.κ. λ_0 για το οποίο η ένταση παίρνει τη μέγιστη τιμή της. Όμως είναι γνωστό ότι η ένταση του φωτός I της δέσμης είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους E του αντίστοιχου ηλεκτρικού πεδίου δηλ. $I \sim |E|^2$. Επίσης γνωρίζουμε ότι το τετράγωνο μιας γκαουσιανής συνάρτησης είναι πάλι μια γκαουσιανή. Επομένως μπορούμε να εικάσουμε ότι το συνολικό πλάτος E του πεδίου της δέσμης είναι τη ίδιας μορφής δηλ. το συχνοτικό του περιεχόμενο

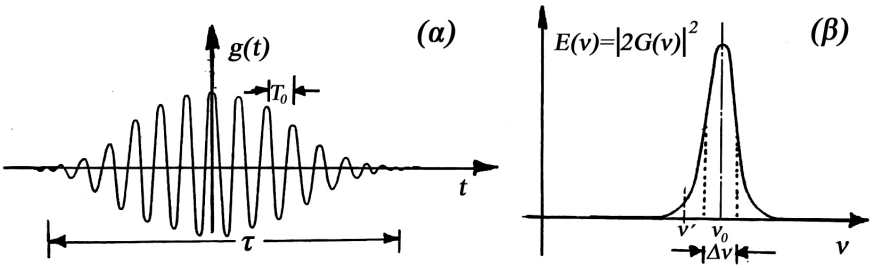
ακολουθεί ένα γκαουσιανό προφίλ. Το γεγονός αυτό θα μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι και το προφίλ (περιβάλλουσα) εκάστου των κυματοσυρμών που συνθέτουν τη δέσμη είναι γκαουσιανή.



(Σχ. 6.1.2.8)

Ας υποθέσουμε κατ' αρχή ότι αυτό συμβαίνει στην πραγματικότητα. Οπότε οι κυματοσυρμοί που απαρτίζουν τη δέσμη είναι της μορφής του (Σχ. 6.1.2.9α) (δηλ. συνημιτονική διαταραχή με περιβάλλουσα γκάουσιανή) και είναι N τον αριθμό. Τότε με βάση τις γνωστές διαδικασίες ανάλυσης κατά Fourier μπορούμε να υπολογίσουμε το ενεργειακό φάσμα $E(\nu)$ του ενός των κυματοσυρμών (Σχ. 6.1.2.9β), το οποίο όπως αποδεικνύεται (βλ. Άσκ. 2 Λυμένη) (με την προϋπόθεση ότι ο αριθμός των αρμονικών περιόδων στο εσωτερικό του είναι πολύ μεγάλος), είναι και αυτό γκαουσιανής μορφής. Κατόπιν επικεντρώνουμε την προσοχή μας σε μια και μοναδική συχνότητα αυτού του φάσματος έστω την ν' (Σχ. 6.1.2.9β). Η συγκεκριμένη συχνότητα, είναι μια συνιστώσα του φάσματος κατά Fourier και αντιστοιχεί σε μια ορισμένη αρμονική διαταραχή άπειρης διάρκειας και σταθερού πλάτους. Με την προϋπόθεση ότι οι κυματοσυρμοί που συνθέτουν τη δέσμη είναι κατά μέσο όρο πανομοιότυποι, τότε τα αντίστοιχα πλάτη των συνιστωσών τους στη συχνότητα ν' θα είναι τα ίδια. Επομένως για να προσδιορίσουμε το συνολικό πλάτος του πεδίου της δέσμης σε μια θέση της, για τη συγκεκριμένη συχνότητα ν' θα πρέπει να προσθέσουμε τις N το πλήθος αρμονικές διαταραχές της ίδιας συχνότητας που προέρχονται από την ανάλυση των N κυματοσυρμών της. Όμως ο τρόπος με τον οποίο εκπέμπονται και διαδίδονται οι κυματοσυρμοί από την πηγή κατά μήκος της δέσμης είναι εντελώς τυχαίος (για τις περιπτώσεις των χαοτικών πηγών). Άρα θα πρέπει να προσθέσουμε τελικά τις απείρου μήκους και διάρκειας αρμονικές διαταραχές συχνότητας ν' και σταθερού πλάτους με εντελώς τυχαίες φάσεις μεταξύ τους. Αλλά για μια τέτοιου είδους πρόσθεση κυμάτων (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1), βρίσκουμε

ότι το τετράγωνο του συνολικού πλάτους $\Psi_{ολ.}$ του πεδίου θα είναι ίσο με N φορές το τετράγωνο του πλάτους Ψ_0 της μιας των διαταραχών δηλ. $\Psi^2_{ολ.}(\nu') = N\Psi^2_0(\nu')$. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια $\Psi^2_{ολ.}(\nu')$ της δέσμης που αντιστοιχεί



(Σχ. 6.1.2.9)

συχνότητα ν' θα ισούται με το άθροισμα των N ομοίων συνιστωσών $\Psi^2_0(\nu')$ των κυματοσυρμών δηλ. $E_{ολ.}(\nu') = NE_0(\nu')$ όπου $E_{ολ.}(\nu') = \Psi^2_{ολ.}(\nu')$ και $E_0(\nu') = \Psi^2_0(\nu')$ Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύουμε ότι το αυτό ισχύει για οποιαδήποτε συχνότητα ν' του φάσματος των κυματοσυρμών. Τελικά η προηγούμενη συλλογιστική μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, το ενεργειακό φάσμα συχνοτήτων της δέσμης του φωτός, είναι μορφολογικά ίδιο με αυτό του ενεργειακού φάσματος του ενός από το σύνολο των ίδιων κυματοσυρμών που την απαρτίζουν. Σκεπτόμενοι με τον αντίστροφο τρόπο και με βάση τα πειραματικά δεδομένα της φασματικής κατανομής της έντασης του φωτός (Σχ. 6.1.2.8), όπως αυτή προκύπτει από την ανάλυση της δέσμης της προερχόμενης από την πηγή, μπορούμε ν' αποφανθούμε ότι και το ενεργειακό φάσμα του ενός από τους κυματοσυρμούς (Σχ. 6.1.2.9β) της δέσμης θα είναι γκαουσιανής μορφής. Επειδή όμως κατά τα γνωστά το τετράγωνο μιας γκαουσιανής κατανομής είναι της ίδιας μορφής με την κατανομή, μπορούμε να συμπεράνουμε τελικά ότι το προφίλ των εκπεμπόμενων κυματοσυρμών είναι της ίδιας μορφολογίας.

Περιγραφή του ψευδομονοχρωματικού φωτός. Συχνοτική ευστάθεια.

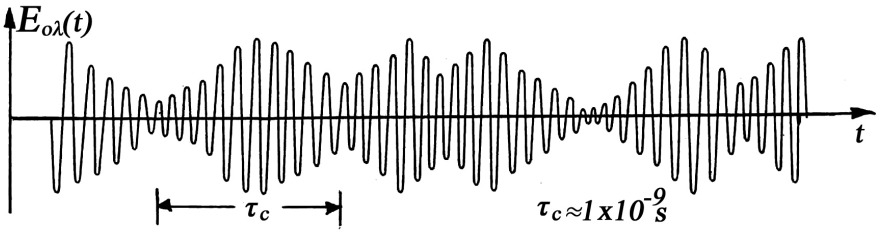
Μια δέσμη ψευδομονοχρωματικού φωτός όπως ήδη αναφέραμε, προκύπτει από την επαλληλία ενός τεράστιου πλήθους κυματοσυρμών, οι οποίοι όμως εκπέμπονται από την πηγή μ' ένα εντελώς τυχαίο τρόπο. Και ναι μεν μεταξύ διαφορετικών σημείων (ή χρονικών στιγμών) στα χωρικά (ή χρονικά) πλαίσια του ενός των κυματοσυρμών υφίσταται σταθερή διαφορά φάσης. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και

μεταξύ σημείων ή χρονικών στιγμών διαφορετικών κυματοσυρμών λόγω του τυχαίου χρόνου εκπομπής τους. Επομένως δεν μπορούμε να περιγράψουμε μορφολογικά τη συνολική διαταραχή του πεδίου της δέσμης (χωρικά ή χρονικά), όπως αυτή ενός μοναδικού κυματοσυρμού του (Σχ. 6.1.2.9α). Το πώς θα εκφραστεί τελικά το πεδίο, εξαρτάται από μία παράμετρο που ονομάζεται ***συχνοτική ευστάθεια (frequency stability)***, και ορίζεται από το λόγο του εύρους $\Delta\nu$ της ζώνης συχνοτήτων του κυματοσυρμού προς τη μέση συχνότητα ν_0 του φάσματός του:

$$F.S. = \Delta\nu/\nu_0 \qquad (6.1.2.23)$$

Που από φυσική άποψη εκφράζει τη φασματική καθαρότητα του φωτός δηλ. κατά πόσο αυτό είναι μονοχρωματικό.

Προκειμένου για το ψευδομοχρωματικό φως, το φασματικό εύρος $\Delta\nu$ είναι αρκετά στενό σε σχέση με τη ν_0. Π.χ. όπως μπορούμε να δούμε από τον (Πίν. 6.1.2.11), για το φως που εκπέμπεται από τη φασματική λυχνία του ισοτόπου του υδραργύρου $\left(\mathrm{Hg}^{198}\right)$ χαμηλής πίεσης στο μ.κ. $\lambda_0 546.078\mathrm{nm}$, (πράσινη γραμμή), το εύρος συχνοτήτων είναι $\Delta\nu \simeq 10^9\,\mathrm{Hz}$. Τότε βρίσκουμε ότι $\Delta\nu/\nu_0 \simeq 1.8\times10^{-6}$. Κάτω από αυτές τις συνθήκες βλέπουμε ότι το συχνοτικό περιεχόμενο αυτών των κυματοσυρμών είναι πολύ περιορισμένο σε σχέση με την κεντρική συχνότητα ν_0. Είναι λοιπόν δυνατόν να θεωρήσουμε ότι η χρονική διαταραχή του συνολικού πεδίου (επαλληλία του συνόλου των κυματοσυρμών) θα μπορούσε να παρασταθεί από μια 'σχεδόν' συνημιτονική διαταραχή. Όμως το πλάτος της όπως και η συχνότητά της θα μεταβάλλονται χρονικά (Σχ. 6.1.2.10).



(Σχ. 6.1.2.10)

Η ιδιομορφία βέβαια της συγκεκριμένης περίπτωσης του ψευδομονοχρωματικού φωτός, είναι ότι οι χρονικές αυτές μεταβολές (πλάτους και συχνότητας) του 'σχεδόν' αρμονικού πεδίου είναι αρκετά αργές λόγω της δεδομένης τιμής της συχνοτικής ευστάθειας. Η χρονική μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου ενός ψευδομονοχρωματικού φωτός μπορεί να εκφραστεί από την επόμενη εξίσωση:

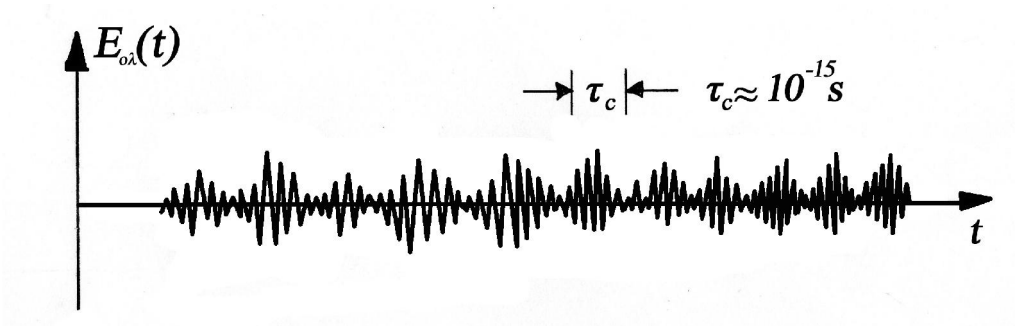
Πηγή φωτός	λ_o *(nm)*	ν_o*(Hz)*	$\Delta\lambda$ *(nm)*	$\Delta\nu$ *(Hz)*	$\Delta\nu/\nu_o$	τ_c *(s)*	l_c
Λευκό φως (από θερμική πηγή)	$\bar{\lambda}$: 550	5.4×10^{14}	300	2.9×10^{14}	0.53	3.4×10^{-15}	1034 nm $\cong 1.8\,\bar{\lambda}$
Κοινή φασματική λυχνία Hg (υψηλής πίεσης)	546,1	5.5×10^{14}	1	1×10^{12}	1.8×10^{-3}	1×10^{-12}	0.03 cm
Φασματική λυχνία ισοτόπου του Hg^{198} (χαμη-λής πίεσης)	546,1	5.5×10^{14}	0.001	1×10^{9}	1.8×10^{-6}	1×10^{-9}	0.3 m
Φασματική λυχνία ισοτόπου του Kr^{86} (χαμηλής πίεσης)	605,6	4.9×10^{14}	0.0012	9.8×10^{8}	1.9×10^{-6}	1.02×10^{-9}	0.3 m
Φασματική λυχνία Cd (χαμηλής πίεσης)	643,8	4.6×10^{14}	0.0013	9.4×10^{8}	2×10^{-6}	1×10^{-9}	0.3 m
Γραμμή H_α Υδρογόνου (φωτόσφαιρα ηλίου)	656,3	4.5×10^{14}	0.8	5.5×10^{11}	1.22×10^{-3}	1.8×10^{-12}	0.053 cm
Κοινό Laser He-Ne	632,8	4.7×10^{14}	5×10^{-4}	3.7×10^{8}	7.9×10^{-7}	$2,7 \times 10^{-9}$	0.8 m
Σταθεροποιημένο (single mode) Laser He-Ne	632,8	4.7×10^{14}	1×10^{-6}	$7,5 \times 10^{5}$	$1,6 \times 10^{-9}$	$1,3 \times 10^{-6}$	390 m
Ειδικό Laser He-Ne	1153	2.6×10^{14}	8.9×10^{-11}	20	7.7×10^{-14}	5×10^{-2}	15×10^{6} m

(Πίν. 6.1.2.11)

$$E_{o\lambda.}(t) = E_0(t)\cos\left[2\pi\nu_0 t + \phi(t)\right] \qquad (6.1.2.24)$$

όπου όπως προαναφέραμε το πλάτος $E_0(t)$ και η φάση $\phi(t)$ είναι σχετικά αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του χρόνου.

Με την ίδια λογική θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τη χρονική διαταραχή του συνολικού πεδίου για την περίπτωση που το φασματικό εύρος $\Delta\lambda$ μιας ακτινοβολίας είναι πολύ μεγάλο. Σαν παράδειγμα χρησιμοποιούμε το λευκό φως που εκπέμπεται από μια θερμική πηγή. Με βάση τα στοιχεία του (Πιν. 6.1.2.11) βρίσκουμε ότι το φασματικό του εύρος είναι $\Delta\lambda \simeq 300\text{nm}$. Πράγματι το ορατό φως εκτείνεται περίπου μεταξύ των 780nm ('κόκκινη' περιοχή του φάσματος) και των 390nm ('ιώδης' περιοχή) (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός (Πίν. 4.3.2.3)) και το μέσο μ.κ. του λαμβάνεται ίσο με $\overline{\lambda} = \lambda_0 = 550\text{nm}$. Τότε με τη βοήθεια των (σχ. 6.1.2.16-18) και της $\Delta\nu = \left(c/\lambda^2\right)\Delta\lambda$, βρίσκουμε ότι η συχνοτική του ευστάθεια είναι $\left(\Delta\nu/\nu_0\right) \simeq 0.53$, ο χρόνος συμφωνίας του $\tau_c \simeq 3.4\times10^{-15}\text{s}$ και το μήκος συμφωνίας $l_c \simeq 1\mu\text{m}$. Δηλ. οι κυματοσυρμοί θα χαρακτηρίζονται από πάρα πολύ μικρή χρονική διάρκεια $\left(10^{-15}\text{s}\right)$ και κατά προέκταση μικρό μήκος (περίπου όσο δύο μ.κ. της μέσης περιοχής του φάσματος). Κάτω από αυτές τις συνθήκες το πεδίο παριστάνεται από μια ταχύτατα μεταβαλλόμενη κατά πλάτος και φάση συνάρτηση σχεδόν 'αρμονικής' μορφής (Σχ. 6.1.2.12), της οποίας τα διαστήματα (χρονικά και ή χωρικά), για τα οποία μπορούμε να διαπιστώσουμε σταθερότητα στη φάση είναι της τάξης του 10^{-15}s. Αυτός ακριβώς είναι ο λόγος για τον οποίο όπως θα δούμε στα

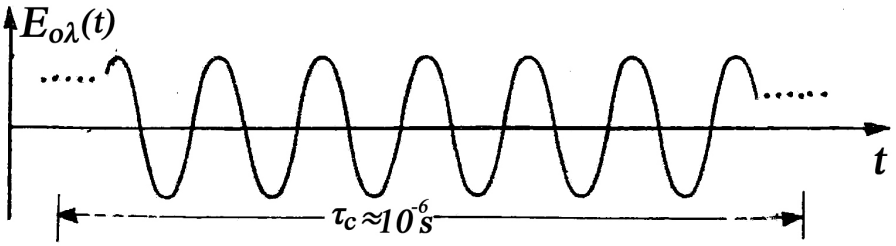


(Σχ. 6.1.2.12)

επόμενα, οι δυνατότητες για να παρατηρήσουμε φαινόμενα συμβολής με λευκό φως είναι πολύ περιορισμένες.

Οι πηγές λευκού φωτός όπως και οι ψευδομονοχρωματικές (δηλ. οι θερμικές πηγές και οι φασματικές λυχνίες) των οποίων τις ιδιότητες των πεδίων περιγράψαμε προηγουμένως, ανήκουν στην κατηγορία των χαοτικών πηγών για τις οποίες η στα-

τιστική των παραγομένων φωτονίων υπακούει σ' αυτή των Bose - Einstein. Σε αντιδιαστολή, το παραγόμενο φως από τις πηγές Laser διαφέρει ποιοτικά σε σχέση μ' αυτό των χαοτικών πηγών. Πράγματι στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι η στατιστική των παραγομένων από Laser φωτονίων υπακούει στη στατιστική Poisson. Για την ανάδειξη των τα χαρακτηριστικών ενός τέτοιου φωτός και συγκεκριμένα με τις παραμέτρους βάσει των οποίων μελετήσαμε λευκό και ψευδομονοχρω-



(Σχ. 6.1.2.13)

ματικό φως, θ' αντλήσουμε ένα παράδειγμα από αυτά που παρατίθενται στον (Πιν.6.1.2.11) και συγκεκριμένα την πηγή του σταθεροποιημέ- νου Laser He-Ne. Από εκεί βρίσκουμε ότι το κεντρικό μ.κ. στο οποίο εκπέμπει η συγκεκριμένη πηγή είναι $\lambda_0 = 632{,}8\text{nm}$, όμως διαθέτει ένα πάρα πολύ στενό φασματικό εύρος: $\Delta\lambda \simeq 1\times10^{-6}\text{nm}$. Με τη βοήθεια των γνωστών σχέσεων βρίσκουμε ότι η συχνοτική του ευστάθεια είναι $(\Delta\nu/\nu_0) \simeq 1.16\times10^{-9}$, ο χρόνος συμφωνίας των παραγόμενων κυματοσυρμών $\tau_c \simeq 1.3\times10^{-6}\text{s}$ και το μήκος συμφωνίας $l_c \simeq 390\text{m}$. Βλέπουμε δηλ. ότι οι κυματοσυρμοί των οποίων η επαλληλία θα μας δώσει την συνολική διαταραχή $E_{o\lambda.}(t)$ του ηλ. πεδίου της δέσμης είναι πάρα πολύ μεγάλου μήκους $(\simeq 400\text{m})$ όπως επίσης και χρονικής διάρκειας (10^{-6}s), σε σχέση με τα αντίστοιχα μεγέθη αυτών του λευκού και των ψευδομονοχρωματικών φώτων. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, το ηλ. πεδίο $E_{o\lambda.}(t)$ μπορεί πλέον να παρασταθεί από μια σχεδόν σταθερού πλάτους και φάσης αρμονική συνάρτηση (Σχ. 6.1.2.13). Τέτοιου είδους πεδία δημιουργούνται στο εσωτερικό καταλλήλων κοιλοτήτων συντονισμού, μέσω της προτρεπόμενης εκπομπής φωτονίων από τα διεγερμένα άτομα ενός ενεργού μέσου (εκπομπή συμφώνου ακτινοβολίας Laser). Το πεδίο της εξερχόμενης από την κοιλότητα δέσμης, προσομοιάζει με αυτό που παράγεται από έναν ιδανικό αρμονικό ταλαντωτή. Όπως θα δούμε στα επόμενα, οι δυνατότητες του να λάβουμε φαινόμενα συμβολής συσχετίζοντας δέσμες που προέρχονται από μια τέτοια πηγή είναι πάρα πολύ μεγάλες.

6.2 *Σχέση μεταξύ της συμφωνίας και της ανίχνευσης συσχετιζόμενων ή μη διαταραχών φωτός*

Ένας άλλος σπουδαίος παράγοντας εκτός της συμφωνίας, που αφορά τη μελέτη του συσχετισμού Η/Μ διαταραχών της ορατής περιοχής του φάσματος, είναι ο τρόπος ανίχνευσής τους. Έχουμε αναφέρει εκτενώς (βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά κύματα (§ 2.4)) τους πιο γνωστούς συνήθεις ανιχνευτές φωτός όπως: Τον αμφιβληστροειδή του ματιού μας, τα φωτογραφικά φιλμ, τις φωτοδιόδους, τις φωτοαντιστάσεις, τους φωτοπολλαπλασιαστές και τις CCD κάμερες. Καθώς και το ποιο φυσικό μέγεθος είναι δυνατόν να μετρήσουν τελικά.

Πράγματι μας είναι γνωστό ότι η περίοδος των διαταραχών για τις οποίες ενδιαφερόμαστε είναι τις τάξης του $T \simeq 10^{-14}\,\mathrm{s}$. Επίσης ο χρόνος απόκρισης των ανιχνευτών (κατά προσέγγιση η δυνατότητά τους όσον αφορά τη χρονική διάκριση μεταξύ δύο διαδοχικών γεγονότων) στην καλλίτερη των περιπτώσεων είναι $T' \simeq 10^{-6}\,\mathrm{s}$. Το γεγονός αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα, στο χρονικό διάστημα απόκρισης του ανιχνευτή να 'προσπέσουν' σ' αυτόν $N = T'/T = 10^{-6}/10^{-14} = 10^{8}$ περίοδοι (ιδωμένοι εδώ σαν 'γεγονότα') της διαταραχής του Η/Μ πεδίου. Που σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν οι συνήθεις ανιχνευτές να 'μετρήσουν' στιγμιαίες τιμές του Η/Μ πεδίου (σε $\mathrm{V/m}$) αυτής τις φασματικής περιοχής. Και το γεγονός αυτό μας οδηγεί κατά τα γνωστά, στην αποδοχή της έννοιας της έντασης του φωτός (Irradiance) που είναι καθαρά ένα ενεργειακό μέγεθος μετρούμενο σε $\mathrm{W/m^2}$ και που ορίζεται από τη (σχ. 2.4.2.6):

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} |\mathbf{S}|\, dt \qquad (6.2.1)$$

Όπου $\langle |\mathbf{S}| \rangle$ η μέση χρονική τιμή του διανύσματος Poynting. τ ο χρόνος ολοκλήρωσης του ανιχνευτή που θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι η χρονική διάρκεια της μέτρησης. Κατά τα γνωστά το διάνυσμα Poynting μας δίνει τη στιγμιαία τιμή της ροής της ακτινοβολίας σε $\mathrm{W/m^2}$ ενός Η/Μ κύματος και για διάδοση στο κενό δίνεται από τη (σχ. 2.4.1.8):

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \qquad (6.2.2)$$

όπου $\mathbf{E}$: η ένταση του ηλ. πεδίου ($\mathrm{V/m}$), $\mathbf{B}$: η μαγνητική επαγωγή (Tesla), ε_0: η ηλ. διαπερατότητα του κενού ($\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$) και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό ($c \simeq 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$).

Στην προκειμένη περίπτωση βέβαια μας ενδιαφέρει η προκύπτουσα ένταση του φωτός κατά την επαλληλία δύο τουλάχιστον διαταραχών, με βάση τον βαθμό συσχετισμού τους δηλ. του βαθμού συμφωνίας τους. Το αποτέλεσμα αυτό θα κρίνει τελικά αν θ' αναδειχθούν ή όχι φαινόμενα συμβολής. Για το λόγο αυτό θ' ανατρέξουμε αρχικά στα συμπεράσματα που προέρχονται από τη μελέτη των (ΠΑΡ/ΤΩΝ 2,3). Εκεί διαπραγματευόμαστε τις εξής περιπτώσεις: 1) Την επαλληλία δύο δεσμών μονοχρωματικών φώτων με διαφορετικές συχνότητες και 2) Την επαλληλία δύο δεσμών ψευδομονοχρωματικού φωτός της ίδιας συχνότητας που προέρχεται: α) Από το ίδιο τμήμα της πηγής και β) Από διαφορετικά τμήματά της. Και τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι τα εξής:

I) Δέσμες φωτός της ίδιας συχνότητας που προέρχονται από το ίδιο τμήμα της πηγής, είναι τελείως σύμφωνες (ΠΑΡ/ΜΑ 3).

II) Δέσμες φωτός της ίδιας συχνότητας που προέρχονται από διαφορετικά τμήματα της πηγής, είναι τελείως ασύμφωνες (ΠΑΡ/ΜΑ 3).

III) Δέσμες φωτός διαφορετικής συχνότητας, είναι μεταξύ τους τελείως ασύμφωνες (ΠΑΡ/ΜΑ 2).

Με βάση αυτά τα δεδομένα είναι πολύ σημαντικό στα επόμενα, να δούμε πως εκφράζεται η ένταση του φωτός για τις δύο ακραίες περιπτώσεις της πλήρους συμφωνίας και της πλήρους ασυμφωνίας, κατά την επαλληλία των δύο δεσμών φωτός. Ένα κατ' αρχή παράδειγμα για την επαλληλία N τον αριθμό διαταραχών της ίδιας συχνότητας που διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση δίνεται στο (ΠΑΡ/ΜΑ 1). Εκεί αποδεικνύεται ότι: Για πλήρη συμφωνία των διαταραχών η ολική τους ένταση I δίνεται από τη σχέση: $I = N^2 I_0$, όπου I_0 είναι η ένταση της μιας από αυτές. Ενώ για την ασύμφωνη επαλληλία ισχύει: $I = NI_0$. Για τα επόμενα θα μας ενδιαφέρει η επαλληλία δύο δεσμών φωτός των οποίων οι εντάσεις των ηλ. πεδίων θα είναι $\mathbf{E}_1$ και $\mathbf{E}_2$. Τα μέτωπα κύματος που αντιπροσωπεύουν αυτές τις δέσμες μπορεί να είναι σφαιρικά, επίπεδα, κυλινδρικά ή άλλης μορφολογίας.

Σύμφωνη επαλληλία

Τότε με βάση τις (σχ. 6.2.1,2) θα έχουμε για την προκύπτουσα ένταση του φωτός:

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \langle |\varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}| \rangle = \varepsilon_0 c^2 \langle |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \rangle = \varepsilon_0 c^2 \langle |\mathbf{E}||\mathbf{B}| \sin\theta \rangle = (\sin\theta = 1,\ \mathbf{E} \perp \mathbf{B}) =$$

$$= \varepsilon_0 c^2 \langle |\mathbf{E}||\mathbf{B}| \rangle = \varepsilon_0 c^2 \langle |\mathbf{E}|(|\mathbf{E}|/c) \rangle \text{ και τελικά:}$$

$$I = \varepsilon_0 c \left\langle |\mathbf{E}|^2 \right\rangle \tag{6.2.3}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι τα $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ είναι παράλληλα μεταξύ τους $(\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{E}_2)$, τότε η (σχ. 6.2.3) γίνεται:

$$I = \varepsilon_0 c \left\langle E^2 \right\rangle \tag{6.2.4}$$

όπου $E = E_1 + E_2$. Επομένως: $I = \varepsilon_0 c \left\langle (E_1 + E_2)^2 \right\rangle = \varepsilon_0 c \left\langle E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \right\rangle$ και τελικά:

$$I = \varepsilon_0 c \left\langle E_1^2 \right\rangle + \varepsilon_0 c \left\langle E_2^2 \right\rangle + 2\varepsilon_0 c \left\langle E_1 E_2 \right\rangle \tag{6.2.5}$$

Και από φυσική άποψη η (σχ. 6.2.5) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στην προκειμένη περίπτωση, η συνολική ένταση του φωτός δεν είναι απλά το άθροισμα των δύο εντάσεων των δεσμών από σημείο σε σημείο. Αλλά το αποτέλεσμα επηρεάζεται από τον παράγοντα συσχετισμού $2\langle E_1E_2 \rangle$. Ο όρος αυτός είναι που προκαλεί τις αυξομειώσεις της έντασης του φωτός σε σχέση με το σταθερό υπόβαθρο του αθροίσματος των δύο εντάσεων. Πρόκειται για τον παράγοντα συμβολής. Τη (σχ. 6.2.5) είναι που θα εφαρμόζουμε, προκειμένου να υπολογίζουμε τις εντάσεις του φωτός κατά τη σύμφωνη επαλληλία των ηλ. πεδίων $E_1(r,t), E_2(r,t)$ το καθένα από τα οποία αντιπροσωπεύει ένα μέτωπο κύματος συγκεκριμένης μορφολογίας.

Ασύμφωνη επαλληλία

Έστω όμως ότι τα πεδία $E_1(r,t), E_2(r,t)$ δεν συσχετίζονται. Δηλ. δεν υφίσταται σταθερότητα όσον αφορά τις διαφορές φάσεις μεταξύ τους (περίπτωση πλήρους ασυμφωνίας). Τότε ο παράγοντας $2\langle E_1E_2 \rangle$ της (σχ. 6.2.5) μηδενίζεται (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1). Οπότε κατά την επαλληλία αυτών των διαταραχών η ένταση του φωτός από σημείο σε σημείο θα δίνεται από τη σχέση:

$$I = \varepsilon_0 c \left\langle E_1^2 \right\rangle + \varepsilon_0 c \left\langle E_2^2 \right\rangle \tag{6.2.6}$$

Και από φυσική άποψη η ανάγνωση της (σχ. 6.2.6) μας λέει ότι: Η συνολική ένταση του φωτός των δύο ασύμφωνων μεταξύ τους διαταραχών, είναι ίση με το άθροισμα των επί μέρους εντάσεών τους. Δηλ. στην πραγματικότητα δεν θα υφίστανται φαινόμενα συμβολής.

6.3 *Συμβολή του φωτός και συμβολομετρικές διατάξεις*

Εφόσον κατά κάποιο τρόπο θέλουμε ν' αναδείξουμε φαινόμενα συμβολής , θα πρέπει με βάση τα προαναφερόμενα να δημιουργήσουμε πλήρως συσχετιζόμενες δέσμες φωτός, οι οποίες θα έλθουν σ' επαλληλία σε μια περιοχή του χώρου. Και προκειμένου να υπάρξει δυνατότητα συσχετισμού (στην προκειμένη περίπτωση πλήρης συμφωνία μεταξύ τους) οι δέσμες φωτός (δηλ. τα μέτωπα κύματος) θα πρέπει κατ' αρχή να προέρχονται από το ίδιο τμήμα της φωτίζουσας πηγής. Το τελευταίο θα συνιστά και όρο σταθερότητας μεταξύ των φάσεών τους.

Κατόπιν το με ποιο βαθμό θα συσχετιστούν οι δέσμες (συνήθως δύο) θα εξαρτηθεί: α) Από τη χρονική συμφωνία των διαταραχών. Δηλ. από το φασματικό τους εύρος. Και β) Από τη χωρική τους συμφωνία. Δηλ. το μέγεθος και το σχήμα του τμήματος της πηγής φωτισμού. Και προκειμένου για χωρικά σύμφωνες διαταραχές (δηλ. τη χρησιμοποίηση σημειακών πηγών φωτισμού), από την άποψη της χρονικής συμφωνίας θ' αναφερόμαστε συνήθως σε τριών ειδών πηγές: Τα Lasers, τις φασματικές λυχνίες αερίου και τις πηγές λευκού φωτός (νήματος βολφραμίου). Δηλ. θα θεωρήσουμε σημειακές φωτίζουσες πηγές με τις παραπάνω φασματικές κατανομές. Λεπτομερή στοιχεία της χρονικής συμφωνίας αυτών των πηγών π.χ. μήκος συμφωνίας, συχνοτικό περιεχόμενο κ.λ.π. δίνονται στον (Πίν. 6.1.2.11).

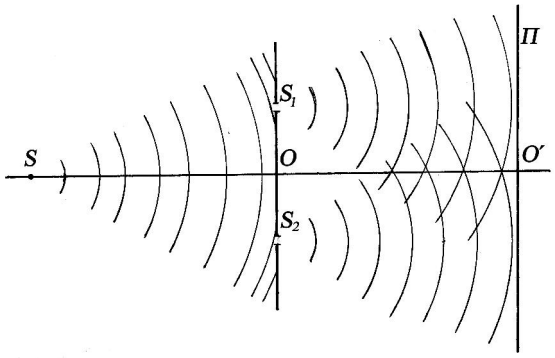
Συνήθως οι δύο συσχετιζόμενες δέσμες φωτός δημιουργούνται από δύο γενικές κατηγορίες διατάξεων που ονομάζονται και ***συμβολόμετρα (interferometers)***. Πρόκειται για τα ***συμβολόμετρα διαίρεσης μετώπου κύματος (wave front splitting interferometers)*** και για τα ***συμβολόμετρα διαίρεσης πλάτους (amplitude splitting interferometers)***.

6.3.1 *Διατάξεις διαίρεσης μετώπου κύματος*

Ένας τρόπος δημιουργίας δύο (ή και περισσότερων) μετ. κύματος που να μπορούν να συσχετιστούν μεταξύ τους, είναι αυτά που έχουν τη δυνατότητα να προκύψουν από τη χωρική διαίρεση ενός αρχικού. Το τελευταίο προέρχεται από ένα τμήμα μιας πηγής ή από όλη την πηγή (εφόσον έχει διαστάσεις) και μια μερική περίπτωση είναι αυτή να είναι σημειακή. Δηλ. το αρχικό μετ. κύματος το χωρίζουμε σε δύο (ή και περισσότερα) με τη βοήθεια διαφόρων οπτικών στοιχείων. Π.χ. διαφραγμάτων που περιλαμβάνουν ανοίγματα, κατόπτρων, πρισμάτων κ.λ.π. Κατόπιν τα δύο επί μέρους μετ. κύματος οδηγούνται σε επαλληλία και πάλι μέσω διαφόρων οπτικών στοιχείων σε μια περιοχή του χώρου. Επομένως ο πρώτος όρος για τη δυνατότητα συμβολής μεταξύ αυτών των μετώπων πληρούται. Δηλ. η προέλευσή τους από το ίδιο τμήμα της πηγής. Ο δεύτερος όρος αφορά τη χωρική και τη χρονική τους συμφωνία, που θα πρέπει ο βαθμός της να είναι αρκετά ικανοποιητικός. Π.

χ. η χρονική συμφωνία καθορίζει το μήκος των κυματοσυρμών που εκπέμπει η πηγή λόγω της φασματικής της κατανομής. Αν λοιπόν η διαφορά των οπτικών δρόμων των δύο δεσμών στην περιοχή που οδηγούνται (με αναφορά μέτρησης τις 'δύο' τώρα σημειακές πηγές πραγματικές ή φανταστικές λόγω του διαχωρισμού σε δύο μέτωπα) είναι μεγαλύτερη του μήκους συμφωνίας τους, δεν πρόκειται οι δέσμες να συμβάλλουν. Το ίδιο επίσης μπορεί να συμβεί για τα δύο μέτωπα που προέρχονται από μια πηγή που εκπέμπει μονοχρωματικό φως (δηλ. πλήρους χρονικής συμφωνίας) αλλά έχει διαστάσεις.

Τα (Σχ. 6.3.1,2,3) αντιστοιχούν σε τρείς συμβολομετρικές διατάξεις διαίρεσης μετ. κύματος. Στο (Σχ. 6.3.1.1) βλέπουμε μια σημειακή πηγή φωτός S να εκπέμπει ένα σφαιρικό μετ. κύματος. Στην πορεία του παρεμβάλλουμε ένα διάφραγμα που περιλαμβάνει δύο όμοια ανοίγματα S_1, S_2 σε συμμετρική θέση σε σχέση με

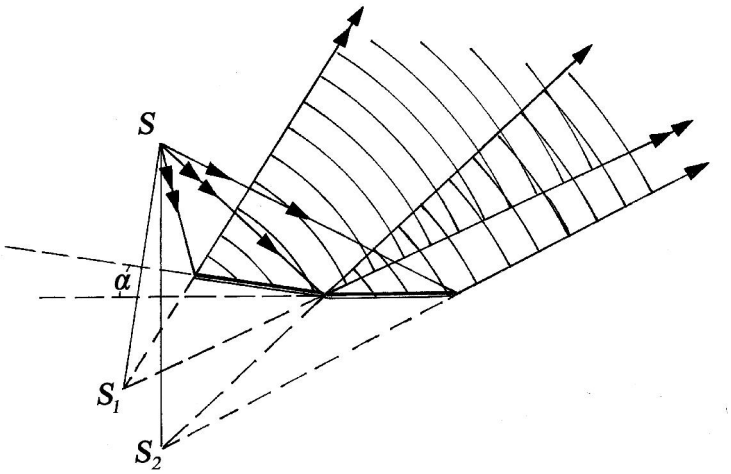


(Σχ. 6.3.1.1)

την πηγή. Τότε τα ανοίγματα S_1, S_2 θα βρίσκονται συνεχώς σε δύο θέσεις εκάστης των ισοφασικών επιφανειών των μετ. κύματος που εκπέμπονται από τη σημειακή πηγή S. Επομένως από τα δύο ανοίγματα – αν τα θεωρήσουμε σημειακά – εκπέμπονται δύο σε φάση σφαιρικά μετ. κύματος τα οποία διαδιδόμενα από μια απόσταση και μετά έρχονται σε επαλληλία. Δηλ. από την αρχική πηγή S δημιουργήθηκαν δύο πραγματικές πηγές οι S_1, S_2 και οι οποίες εκπέμπουν σε φάση (δηλ. με σύμφωνο τρόπο). Η διάταξη αυτή από ιστορική άποψη είναι που επινοήθηκε από τον T. Young (περί το 1802) και για πρώτη φορά παρατηρήθηκαν κροσσοί συμβολής. Μάλιστα όπως αναφέρουμε και στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, με τη βοήθειά τους μετρήθηκε το μ. κ. της μονοχρωματικής ακτινοβολίας που εξέπεμπε η χρησιμοποιούμενη πηγή.

Μια δεύτερη διάταξη, αυτή του (Σχ. 6.3.1.2) συγκροτείται από δύο επίπεδα κάτοπτρα. Το ένα από αυτά βρίσκεται σε μικρή κλίση γωνίας α σε σχέση με το άλλο. Μια σημειακή πηγή S που βρίσκεται σε μια μικρή σχετικά απόσταση από

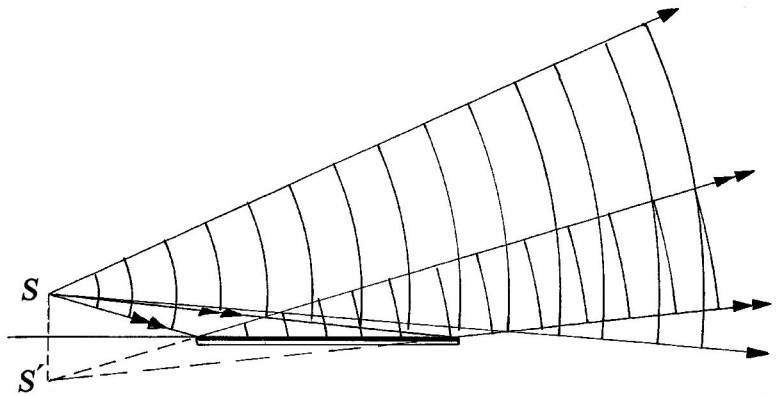
αυτά, εκπέμπει ένα σφαιρικό μετ. κύματος. Τμήμα αυτού του μετώπου προσπίπτει στο ένα κάτοπτρο και ένα άλλο τμήμα του στο άλλο κάτοπτρο. Μετά την ανάκλασή τους συνεχίζουν να διαδίδονται, ερχόμενα σε επαλληλία σε μια περιοχή του χώρου. Στην προκειμένη περίπτωση η πραγματική σημειακή πηγή S δημιουργεί δύο φανταστικές τις S_1, S_2 οι οποίες εκπέμπουν σε συμφωνία. Είναι σαφές ότι η κλίση α



(Σχ. 6.3.1.2)

των δύο κατόπτρων καθορίζει και την απόσταση μεταξύ των φανταστικών πηγών S_1, S_2. Το σύστημα ονομάζεται διπλό κάτοπτρο του Fresnel.

Η διάταξη του (Σχ. 6.3.1.3) περιλαμβάνει μόνο ένα επίπεδο κάτοπτρο. Σε



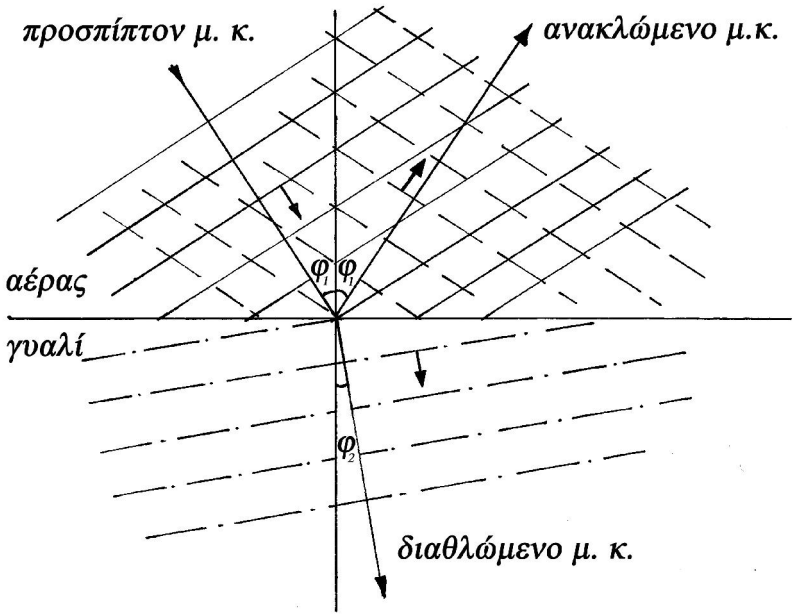
(Σχ. 6.3.1.3)

μικρή σχετικά κατακόρυφη απόσταση από την νοητή προέκταση του κατόπτρου, βρίσκεται και εκπέμπει μια σημειακή πηγή S. Τμήμα αυτού του σφαιρικού μετ. κύματος διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο και τμήμα του ανακλάται στο κάτοπτρο. Τα δύο τελευταία μετά από μια ορισμένη απόσταση από το σύστημα πηγής κατό-

πτρου έχουν τη δυνατότητα να έλθουν σε επαλληλία. Τα δύο τελικά σφαιρικά μετ. κύματος έχουν προέλευση την πραγματική πηγή S και την φανταστική S' που αποτελεί κατοπτρικό είδωλο της S. Και η απόσταση μεταξύ των S, S' εξαρτάται από τη θέση της S σε σχέση με το κάτοπτρο.

6.3.2 *Διατάξεις διαίρεσης πλάτους*

Ο μηχανισμός διαίρεσης μετ. κύματος σ' αυτού του είδους τις συμβολομετρικές διατάξεις (§ 6.3.1), αφορούσε το χωρικό διαχωρισμό ενός αρχικού μετ. κύματος σε δύο (ή περισσότερα) τμήματα. Κατόπιν μεσολαβούσε η σύγκλιση των τμημάτων αυτών σε μια περιοχή του χώρου, προκειμένου – πληρουμένων ορισμένων συνθηκών – ν' αναδειχθούν φαινόμενα συμβολής. 'Διαίρεση' όμως μπορούμε να πάρουμε και με διαφορετικούς τρόπους. Ο πλέον συνηθισμένος είναι αυτός που επιτυγχάνεται όταν μια δέσμη φωτός (συγκεκριμένης μορφολογίας μέτωπο κύματος) προσπέσει στην ενδοεπιφάνεια που διαχωρίζει δύο διαφανή διηλεκτρικά. Στο (Σχ. 6.3.2.1) μπορούμε να δούμε μια τέτοια επίπεδη επιφάνεια μεταξύ των διηλεκ-



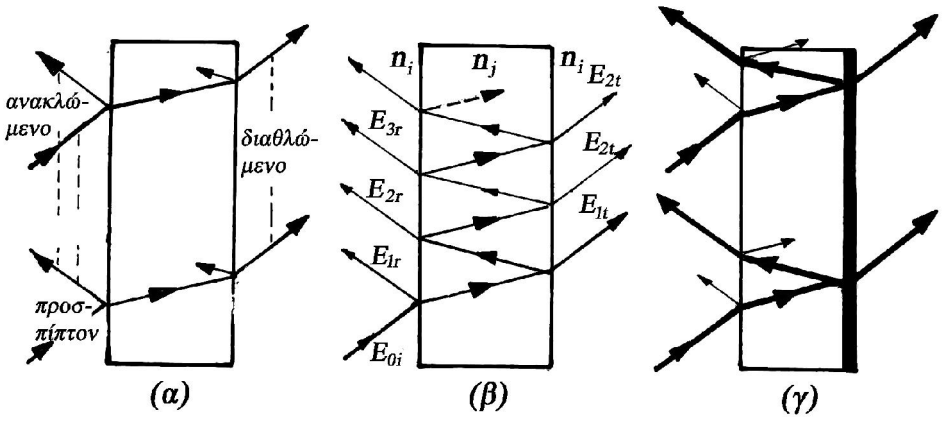
(Σχ. 6.3.2.1)

τρικών αέρα-γυαλιού. Και για λόγους απλότητας θεωρούμε την πρόσπτωση σ' αυτήν ενός επιπέδου μετ. κύματος με μια ορισμένη γωνία πρόσπτωσης ϕ_1. Τότε, και με όρους της Γεωμετρικής Οπτικής γνωρίζουμε ότι θα προκύψουν δύο δέσμες φωτός: Μια ανακλώμενη με γωνία ϕ_1 και μία διαθλώμενη με γωνία διάθλασης $\phi_2 < \phi_1$ (νόμος του Snell).

Η πλήρης βέβαια και ακριβής ανάλυση του φαινομένου γίνεται με τη βοήθεια της Η/Μ θεωρίας. Και συγκεκριμένα των εξισώσεων Fresnel, μέσω των μεγεθών των συντελεστών ανακλαστικότητας και διαπερατότητας (βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ΘΕΜΑ 1)). Όσον αφορά τα προσπίπτοντα μετ. κύματος εκτός από επίπεδα θα μπορούσαν να είναι τυχαίας μορφολογίας. Και εφόσον οι ενδοεπιφάνειες είναι οπτικά επίπεδες, η μορφολογία των ανακλώμενων και διαθλώμενων μετ. κύματος παραμένει ίδια με αυτήν του προσπίπτοντος. Εκτός βέβαια από επίπεδες, οι ενδοεπιφάνειες θα μπορούσαν να είναι και άλλης μορφής όπως π.χ. σφαιρικές ή και τυχαίας μορφής. Με βάση τα προαναφερόμενα, το αρχικό μετ. κύματος που το πλάτος του ηλεκτρικού του πεδίου ήταν $E_i(r,t)$ 'διαιρέθηκε' στο ανακλώμενο μέτωπο με πλάτος ηλ. πεδίου $E_r(r,t)$ και στο διαθλώμενο πλάτους ηλ. πεδίου $E_t(r,t)$. Έτσι δικαιολογείται η ονοματολογία της δημιουργίας δύο μετ. κύματος από ένα αρχικό μέσω 'διαίρεσης' πλάτους.

Ο πλέον όμως συνήθης τρόπος διαίρεσης του πλάτους του πεδίου ενός αρχικού μετώπου κύματος, είναι η πρόσπτωσή του όχι σε μια ενδοεπιφάνεια αλλά σ' ένα πλακίδιο από διαφανές διηλεκτρικό (Σχ. 6.3.2.2α), του οποίου οι πλευρές έστω είναι παράλληλες. Με βάση τους νόμους ανάκλασης και διάθλασης, είναι δυνατόν να προβλέψουμε κατ' αρχή ότι θα προκύψουν δύο νέα μέτωπα κύματος: το ανακλώμενο από την πρώτη επιφάνεια και το διαθλώμενο από τη δεύτερη. Αν τα τελευταία οδηγηθούν κατά κάποιο τρόπο σε κοινή περιοχή (π.χ. μέσω της ανάκλασής τους από δύο κάτοπτρα) θα μπορούσαν να συσχετιστούν. Στην πραγματικότητα όμως το πρόβλημα εμφανίζεται περισσότερο περίπλοκο. Ο λόγος είναι οι πολλαπλές ανακλάσεις που υφίσταται το αρχικά διαθλώμενο μέτωπο κύματος μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης επιφάνειας του πλακιδίου. Το γεγονός θα έχει σαν αποτέλεσμα την ανάδυση δευτερευόντων μετώπων από τις δύο του επιφάνειες όπως φαίνεται από διάγραμμα ακτίνων του (Σχ. 6.3.2.2β). Άρα εκτός του μετώπου κύματος πλάτους E_{1r}, παράλληλα προς αυτό και προς την ίδια διεύθυνση, διαδίδονται και άλλα με πλάτη: $E_{2r}, E_{3r},...$ Με ανάλογο τρόπο, από τη δεύτερη επιφάνεια του πλακιδίου εκτός του πρώτου διαθλωμένου πλάτους E_{1t}, διαδίδονται παράλληλα προς αυτό και τα μέτωπα με πλάτη: $E_{2t}, E_{3t},...$ Στην πράξη βέβαια οι τιμές των διαδοχικών πλατών φθίνουν σχετικά γρήγορα. Π.χ. αποδεικνύεται (βλ. επόμενο παράδειγμα) ότι για ένα πλακίδιο από γυαλί $(n=1.5)$ που βρίσκεται μέσα σε αέρα, οι τιμές των πλατών για τα τρία πρώτα ανακλώμενα μέτωπα κύματος είναι: $E_{1r}=0.2E_{0i}$, $E_{2r}=0.192E_{0i}$, $E_{3r}=0,008E_{0i}$ όπου E_{0i} η τιμή πλάτους του σχεδόν κάθετα προσπίπτοντος αρχικού μετώπου στην πρώτη επιφάνεια. Βλέπουμε χαρακτηριστικά ότι σημαντικές τιμές πλάτους διαθέτουν μόνο τα δύο πρώτα ανακλώμενα μέτωπα ενώ τα υπόλοιπα μπορούν κατ' αρχή ν' αγνοηθούν. Όπως θα δούμε στα ε-

πόμενα κατά την περιγραφή συγκεκριμένων συμβολομέτρων διαίρεσης πλάτους, είναι τα δύο αυτά μέτωπα κύματος (όπως και τα δύο πρώτα διαθλώμενα) που πρόκειται να συμβάλλουν με μια διαφορά φάσης που προκύπτει λόγω του ότι διανύουν διαφορετικούς οπτικούς δρόμους μέσα στο πλακίδιο.



(Σχ. 6.3.2.2)

Παράδειγμα

Έστω ότι ένα πλακίδιο πάχους d από γυαλί $(n_j = 1.5)$ βρίσκεται μέσα στον αέρα $(n_i = 1.0)$ (Σχ. 6.3.2.2β). Θεωρούμε ότι μια διαταραχή πλάτους E_{0i} προσπίπτει σχεδόν κάθετα στην επιφάνειά του και μέσω πολλαπλών ανακλάσεων και διαθλάσεων διαιρείται κατά πλάτος. α) Να υπολογιστούν τα πλάτη των τριών πρώτων ανακλωμένων διαταραχών E_{1r}, E_{2r}, E_{3r} συναρτήσει του E_{0i} για την περίπτωση που δεν έχουμε απορρόφηση. β) Να υπολογιστούν τα πλάτη των τριών πρώτων διαθλώμενων διαταραχών E_{1t}, E_{2t}, E_{3t} συναρτήσει του E_{0i}.

- α) Για την επίλυση του προβλήματος θα πρέπει να υπολογιστούν οι συντελεστές ανακλαστικότητας ρ_{ij}, ρ_{ji} (ή ρ, ρ') και διαπερατότητας τ_{ij}, τ_{ji} (ή τ, τ') του πλακιδίου. Αποδεικνύεται (βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτομαγνητικά κύματα (ΘΕΜΑ 1) (σχ. 1.14,15)) ότι αν πρόκειται για διηλεκτρικά και για σχεδόν κάθετη πρόσπτωση της ακτινοβολίας τότε μεταξύ των συντελεστών ρ_σ, ρ_π και τ_σ, τ_π ισχύουν οι σχέσεις:

$$\rho_\sigma = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t} = -\rho_\pi \qquad \text{και} \qquad \tau_\sigma = \frac{2n_i}{n_i + n_t} = \tau_\pi$$

Επίσης από παράδειγμα στο ίδιο θέμα βλέπουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\rho_{ij} = -\rho_{ji} \quad \text{και} \quad \tau_{ij}\tau_{ji} = 1 - \rho_{ij}^2$$
$$(\rho = -\rho') \qquad (\tau\tau' = 1 - \rho^2)$$

όπου ρ ο συντελεστής ανακλαστικότητας από το i στο j και ο ρ' ο συντελεστής κατά την αντίθετη φορά. τ ο συντελεστής διαπερατότητας από το i στο j και τ' ο συντελεστής κατά την αντίθετη φορά διάδοσης. Με βάση τις τιμές των δ.δ. βρίσκουμε: $\rho = 0.2,\ \tau = 0.8$ και $\tau' = 1.2$. Επομένως τα πλάτη των E_{1r}, E_{2r}, E_{3r} θα είναι κατά σειρά:

$$E_{1r} = \rho E_{0i} = 0.2E_{0i} \quad E_{2r} = \tau\rho\tau' E_{0i} = 0.192E_{0i} \quad E_{3r} = \tau\rho^3\tau' E_{0i} = 0.008E_{0i}$$

Βλέπουμε δηλ. ότι η τιμή της διαταραχής E_{3r} είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις E_{1r}, E_{2r}. Αυτός ακριβώς είναι ο λόγος για τον οποίο προκειμένου να υπολογιστεί το πρότυπο συμβολής μέσω επίπεδης πλάκας διηλεκτρικού, λαμβάνονται υπ' όψιν μόνο οι δύο πρώτες ανακλώμενες διαταραχές.

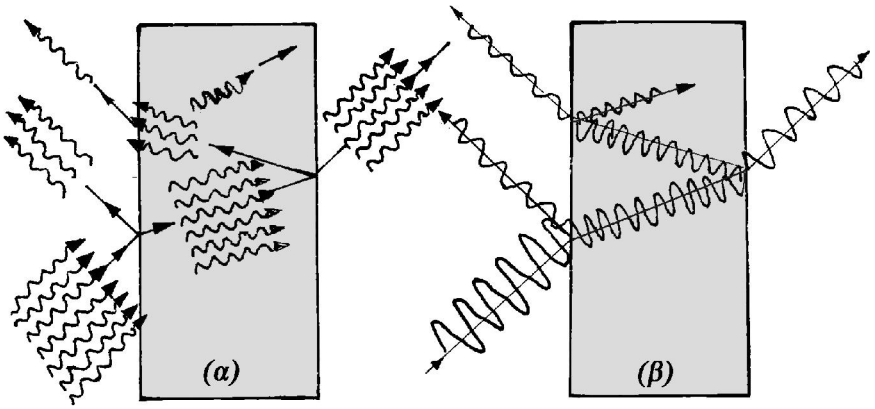
β) Όσον αφορά τις διαθλώμενες διαταραχές E_{1t}, E_{2t}, E_{3t} θα δίνονται κατά σειρά από τις σχέσεις:

$$E_{1t} = \tau\tau' E_{0i} = 0.96E_{0i} \quad E_{2t} = \tau\rho^2\tau' E_{0i} = 0.038E_{0i} \quad E_{3t} = \tau\rho^4\tau' E_{0i} = 0.0015E_{0i}$$

Βλέπουμε πάλι ότι σημαντικές είναι οι δύο πρώτες διαθλώμενες. Η φωτοαντίθεση όμως του σχηματιζόμενου από αυτές προτύπου συμβολής είναι κατά πολύ μικρότερη του αντιστοίχου από τις δύο πρώτες ανακλώμενες λόγω της μεγάλης διαφοράς στις τιμές των πλατών τους.

Η έννοια της 'διαίρεσης πλάτους' (δηλ. του πλάτους της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου) ενός μετώπου κύματος μπορεί στοιχειωδώς να ερμηνευθεί όχι τόσο αυστηρά με βάση την ημικλασική περιγραφή του Η/Μ πεδίου δηλ. την έννοια των κυματοσυρμών. Ας θεωρήσουμε την πρόσπτωση ενός επιπέδου μετώπου κύματος στη μια επιφάνεια πλακιδίου από διαφανές διηλεκτρικό με παράλληλες έδρες (Σχ. 6.3.2.3α). Τότε από τους σε φάση κυματοσυρμούς οι οποίοι προσεγγίζουν μια μικρή κατ' αρχή περιοχή της πρώτης επιφάνειας του πλακιδίου, ένα ορισμένο ποσοστό τους ανακλάται και ένα διαθλάται προς το εσωτερικό του. Το διαθλώμενο, ποσοστό των κυματοσυρμών, φθάνοντας στη δεύτερη επιφάνεια μ' ένα παρόμοιο τρόπο, κατά ένα ποσοστό ανακλάται προς το εσωτερικό του και μέρος του διαθλάται στο χώρο μετά τη δεύτερη επιφάνειά του κ.ο.κ. Τα ποσοστά των ανακλωμένων και διαθλωμένων κυματοσυρμών από τις επιφάνειες των διηλεκτρικών, εξαρτώνται από τις γωνίες πρόσπτωσης και τους δ.δ. του υλικού του πλακιδίου καθώς και του περιβάλλοντος χώρου. Αυτό όμως που συμβαίνει σε μια μικρή περιοχή του πλακιδίου το οποίο προσεγγίζεται από ένα αντίστοιχο τμήμα του μετώπου κύματος, ισχύει και για όλη την επιφάνειά του που προσεγγίζεται από το συνολικά προσπίπτον μέτωπο κύματος. Με την προϋπόθεση ότι η επιφάνεια του διηλεκτρικού είναι οπτικά επίπε-

δη όπως ήδη αναφέραμε, δεν θα υφίσταται μορφολογική αλλαγή των ανακλωμένων και διαθλωμένων μετώπων κύματος (δηλ. στην προκειμένη περίπτωση, τα σημεία ίσης φάσης των κυματοσυρμών θα είναι επίπεδα). Η μόνη μεταβολή θα είναι στην τιμή του πλάτους των ηλεκτρικών τους πεδίων προκειμένου να ισχύει η αρχή της διατήρησης της ενέργειας καθώς και στη φάση τους, για την περίπτωση ανάκλασης



(Σχ. 6.3.2.3)

από οπτικά αραιότερο σε οπτικά πυκνότερο μέσο. Με δεδομένο επίσης ένα ορισμένο βαθμό χρονικής συμφωνίας που διαθέτουν (ο οποίος ούτως ή άλλως εξαρτάται από το φασματικό εύρος της φωτίζουσας πηγής), κατανοούμε ότι με τη βοήθεια του πλακιδίου έχουμε τη δυνατότητα από ένα αρχικό μέτωπο κύματος με 'διαίρεση' του πλάτους του να δημιουργήσουμε δύο ή και περισσότερα. Τα τελευταία ερχόμενα σε επαλληλία θα μπορούν να συσχετιστούν και κατά προέκταση να δώσουν ή όχι φαινόμενα συμβολής ανάλογα με τη διαφορά των οπτικών τους δρόμων που μπορεί να είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος του μήκους συμφωνίας των κυματοσυρμών.

Στο (Σχ. 6.3.2.3β) σχεδιαγραφούμε την Η/Μ προσέγγιση αυτού που ονομάζουμε 'διαίρεση πλάτους'. Μπορούμε να δούμε χαρακτηριστικά την ελάττωση κατά ορισμένο ποσοστό των πλατών των ανακλωμένων και διαθλωμένων συνεχών διαταραχών (στο σχήμα όχι με εντελώς ακριβή αναλογία). Γενικά το συγκεκριμένο πρόβλημα, είναι περισσότερο περίπλοκο συγκριτικά με τον τρόπο που προσπαθήσαμε να το περιγράψουμε προηγουμένως. Η επίλυσή του επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής (Q.E.D)* με βάση τη φωτονική περιγραφή του φωτός. Μια πολύ καλή αντιμετώπιση γίνεται επίσης με τη βοήθεια της κλασικής Η/Μ θεωρίας μέσω των εξισώσεων του Fresnel όπως ήδη την εφαρμόσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Οι τελευταίες προκύπτουν από την εφαρμογή των ορια-

* R.Feynman: 'Q.E.D' (Κβαντική Ηλεκτροδυναμική). Εκδ. Τροχαλία. Αθήνα (1987).

κών συνθηκών κατά την ανάκλαση και διάθλαση των Η/Μ κυμάτων στις ενδοεπιφάνειες μεταξύ διαφορετικών διηλεκτρικών.

Το ζήτημα όμως με τα διηλεκτρικά, είναι ότι η ανακλαστικότητά τους (όσον αφορά την ένταση του φωτός) που εξαρτάται από τη γωνία πρόσπτωσης και τους δ.δ. είναι πολύ μικρή. Π.χ. για την ενδοεπιφάνεια μεταξύ αέρα $(n \simeq 1.0)$ και γυαλιού $(n \simeq 1.5)$ και για κάθετη σχεδόν πρόσπτωση θα ανακλάται ποσοστό περίπου 4% και θα διαθλάται 96% με την προϋπόθεση ότι δεν υφίσταται απορρόφηση. Το ποσοστό της διαθλώμενης δεν θα διαφοροποιηθεί σημαντικά κατά την πρόσπτωσή της στη δεύτερη επιφάνεια του πλακιδίου λόγω του μικρού ποσοστού της εσωτερικά ανακλώμενης. Τελικά η ανακλώμενη από την πρώτη επιφάνεια και η διαθλώμενη από την τελευταία θα διαφέρουν κατά πολύ μεταξύ τους ως προς την ένταση. Τις περισσότερες φορές όμως απαιτείται οι εντάσεις των δύο αυτών δεσμών (εφόσον χρησιμοποιηθούν για πειράματα συμβολής) να είναι ίσες προκειμένου – όπως θα δούμε στα επόμενα – η ***φωτοαντίθεση (contrast)*** των κροσσών συμβολής να είναι η μέγιστη δυνατή.

Για να επιτευχθεί το ζητούμενο (ή στη γενικότερη περίπτωση δέσμες με συγκεκριμένο λόγο εντάσεων) χρησιμοποιούμε τους λεγόμενους ***διαχωριστές δέσμης (beam splitters)***. Τα οπτικά αυτά εξαρτήματα αποτελούνται από οπτικά επίπεδες πλάκες διηλεκτρικού, των οποίων η μία πλευρά είναι επικαλυμμένη με ένα λεπτό υμένιο μετάλλου (Σχ. 6.3.2.2γ) μεγάλης ανακλαστικότητας. Η ανακλαστικότητα R κατά τα γνωστά είναι ο λόγος της ανακλώμενης έντασης του φωτός προς την προσπίπτουσα. Για κάθετη πρόσπτωση και για μ.κ. φωτός $\lambda \simeq 550\text{nm}$ θα είναι π.χ. για τον Άργυρο $R = 93\%$ και για γυαλί επικαλυμμένο με Άργυρο $R = 88\%$. Οι προηγούμενες βέβαια τιμές αφορούν μεγάλα πάχη υμενίων του μετάλλου που είναι αδιαφανή και τα οποία μόνο ανακλούν το φως, ενώ το διαθλώμενο ποσοστό απορροφάται αμέσως σε μικρό βάθος όπως αποδεικνύεται από την ηλεκτροδυναμική των μεταλλικών επιφανειών (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός. ΘΕΜΑ 2 'Οπτικές ιδιότητες των αγωγών'). Αν όμως το υμένιο είναι πολύ λεπτό θα είναι ημιδιαφανές και θα έχουμε ταυτόχρονα ανακλώμενη και διαθλώμενη δέσμη. Τελικά αυτό που καθορίζει τα ποσοστά έντασης των δύο δεσμών, είναι το πάχος του μεταλλικού υμενίου. Δευτερεύουσες ανακλάσεις από την πρώτη επιφάνεια του διηλεκτρικού (εσωτερικές και εξωτερικές) δεν λαμβάνονται υπόψη λόγω πλέον της μικρής τιμής της έντασής τους και με διάφορους τρόπους μπορούν ν' απομακρυνθούν σαν θόρυβος. Έχουμε λοιπόν τη δυνατότητα μέσω του διαχωριστή να δημιουργήσουμε δύο μέτωπα κύματος ίσης (ή με καθορισμένο λόγο) έντασης με κοινή θέση αναφοράς το μεταλλικό του υμένιο. Παραδείγματα χρήσης τέτοιων διαχωριστών θα δούμε στα επόμενα κατά την περιγραφή των συμβολόμετρων Michelson και Fabry-Perot. Επίσης για όλες σχεδόν τις περιπτώσεις θα θεωρήσουμε ότι οι φωτίζουσες πηγές εκπέ-

μπουν μερικά χρονικά σύμφωνο φως (ψευδομονοχρωματικό) εκτός των λίγων περιπτώσεων που ο φωτισμός θα γίνεται με λευκό φως ή με φως Laser.

6.4 *Συμβολή και συμβολόμετρα μέσω διαίρεσης μετώπου κύματος*

6.4.1 *Η διάταξη συμβολής του Young. Γενική θεώρηση*

Στην προκειμένη περίπτωση, τα δύο προς επαλληλία μέτωπα κύματος προκύπτουν από το χωρικό διαχωρισμό ενός αρχικού, με βασικό τους πλεονέκτημα ότι προέρχονται από την ίδια πηγή, γεγονός που αποτελεί προϋπόθεση για να συμβάλλουν. Στην πραγματικότητα αυτό που συμβαίνει, είναι η ταυτόχρονη δημιουργία δύο χωρικά συμφώνων πηγών από μία αρχική. Επίσης ο βαθμός της χρονικής συμφωνίας των μετώπων κύματος – που κατά τα γνωστά εξαρτάται από το φασματικό εύρος της εκπεμπόμενης από την πηγή ακτινοβολίας – καθίσταται ο δεύτερος καθοριστικός παράγοντας (δεδομένου ότι αφορά το μήκος των κυματοσυρμών), που οδηγεί σε φαινόμενα συμβολής.

Ένας δεύτερος παράγοντας ο οποίος δεν είναι μεν καθοριστικός για τη μελέτη της συμβολής του φωτός αλλά θα συζητηθεί εδώ, είναι η μορφολογία των συσχετιζόμενων μετώπων κύματος. Πράγματι στις περιγραφόμενες διατάξεις τα δύο μέτωπα κύματος θα προέρχονται από ένα παρεμβαλλόμενο πέτασμα στην πορεία του αρχικού, το οποίο περιέχει δύο κυκλικά ανοίγματα. Συνήθως αν οι διάμετροι αυτών των ανοιγμάτων είναι πάρα πολύ μικρές, ομιλούμε για σημειακές πηγές με συνέπεια τα δύο εκπεμπόμενα μέτωπα κύματος να είναι σφαιρικά. Αν όμως τα ανοίγματα έχουν πεπερασμένες διαστάσεις τότε δεν θα μπορούσαν ν' αγνοηθούν φαινόμενα περίθλασης του φωτός. Επομένως τα δύο μέτωπα κύματος (ίδια μεταξύ τους) θα είναι περίπλοκης δομής η οποία θα εξαρτάται αποκλειστικά από τη μορφολογία των ανοιγμάτων. Στην προκειμένη περίπτωση το πρότυπο συμβολής δεν μεταβάλλεται και εξαρτάται από την απόσταση των ανοιγμάτων μεταξύ τους (όπως βέβαια και από το μ.κ. της φωτίζουσας πηγής καθώς και την απόσταση στην οποία σχηματίζονται οι κροσσοί). Το προαναφερόμενο όμως πρότυπο, θα διαμορφώνεται από το αντίστοιχο πρότυπο περίθλασης, το οποίο βέβαια έχει σχέση (βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός) με τη μορφολογία των περιθλωμένων μετώπων κύματος. Στην ανάλυση που θ' ακολουθήσει, ο διαχωρισμός του αρχικού μετ. κύματος θα γίνει με τη βοήθεια ενός πετάσματος, το οποίο θα περιλαμβάνει δύο σημειακά ανοίγματα σε μία απόσταση μεταξύ τους. Τα τελευταία θ' αποτελέσουν τις δύο δευτερεύουσες σημειακές πηγές από τις οποίες θα εκπέμπονται σφαιρικά μέτωπα κύματος. Στα επόμενα όλοι οι υπολογισμοί θα γίνουν με βάση την αναλυτική έκφραση των συγκεκριμένων μετώπων.

Ένας άλλος βασικός παράγοντας που πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν κατά την περιγραφή της διάταξης συμβολής του Young, είναι η απόσταση μεταξύ των δευτερευόντων πηγών και του πετάσματος στο οποίο θεωρούμε ότι συσχετίζονται τα προκύπτοντα μέτωπα κύματος. Θα θεωρήσουμε ότι τη θέση αυτή την παίρνουμε σε απόσταση πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση μεταξύ των δύο δευτερευόντων πηγών, όταν η φωτίζουσα πηγή εκπέμπει φως στο ορατό τμήμα του Η/Μ φάσματος. Η συμβολή στην περίπτωση αυτή ονομάζεται ***συμβολή μακρινού πεδίου (far field interference)*** και σχετίζεται άμεσα με την ***περίθλαση Fraunhofer***. Μια προσεγγιστική σχέση που καθορίζει αυτά τα όρια δηλ. την απόσταση L μεταξύ πηγών – πετάσματος όπου και παίρνουμε τη συμβολή, δίνεται από τη σχέση: $L \gg d^2/8\lambda$ με γνωστά το μ.κ. λ της φωτίζουσας πηγής και την απόσταση d μεταξύ των δύο δευτερευόντων πηγών.

Παράδειγμα 1

Στην πράξη όταν μιλούμε για συμβολή μακρινού πεδίου εννοούμε το εξής: Τα δύο σφαιρικά μετ. κύματος που προέρχονται από τις δύο σημειακές πηγές S_1, S_2 συσχετίζονται σε μια τέτοια απόσταση όπου πλέον στην περιοχή της συμβολής τα σφαιρικά μετ. κύματος εκφυλίζονται σε επίπεδα. Κάτω από αυτές τις συνθήκες ν' αποδειχθεί ότι κατά προσέγγιση ισχύει η σχέση: $R \gg d^2/8\lambda$. Όπου: R η απόσταση πηγών – πετάσματος, d η απόσταση μεταξύ των σημειακών πηγών και λ το μ.κ. της χρησιμοποιούμενης ακτινοβολίας.

- Όπως φαίνεται στο (Σχ. 6.4.1.1) $OO' = R$ είναι η απόσταση μεταξύ των πηγών και του πετάσματος στην περιοχή του οποίου (περί το O') συσχετίζονται οι διαταραχές οι προερχόμενες από τις S_1, S_2. Θεωρούμε τώρα ότι το εκπεμπόμενο από την πηγή S_1 σφαιρικό μετ. κύματος εγγίζει το πέτασμα στη θέση O' όπου $S_1O' = R + l$, με l τη διαφορά μεταξύ των S_1O' και OO'. Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο S_1OO' θα έχουμε:

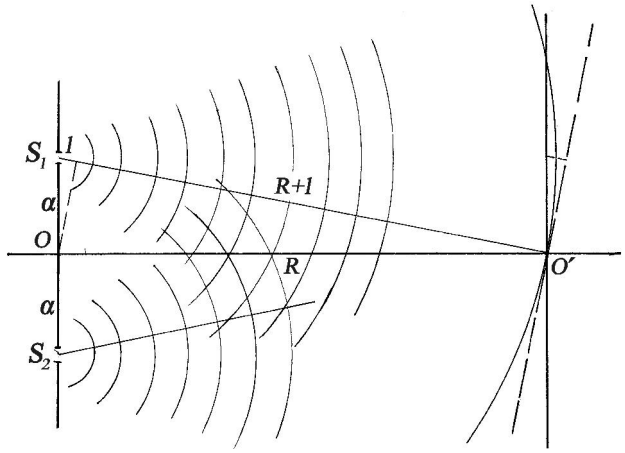
$$(R+l)^2 = a^2 + R^2 \Rightarrow R^2 + 2Rl + l^2 = a^2 + R \Rightarrow 2Rl + l^2 = a^2$$

Και για την περίπτωση που η απόσταση πηγών - πετάσματος μεγαλώνει σε σχέση με την απόσταση $d = 2a$ μεταξύ των δύο πηγών θα είναι $l \ll$. Οπότε:

$$R = a^2/2l \qquad (1)$$

Προκειμένου τώρα η σφαιρικότητα του μετ. κύματος να εκφυλιστεί σε επιπεδότητα (στην περιοχή του O') και προκειμένου να συνδέσουμε τη διαδικασία αυ-

τή με κυματικούς όρους, στην πράξη πρέπει να ισχύει: Για όλο το εύρος των ισοφασικών τους επιφανειών μεταξύ των συζυγών τους σημείων θα πρέπει: $l \ll \lambda$



(Σχ. 6.4.1.1)

όπου λ κατά τα γνωστά το μ.κ. της χρησιμοποιούμενης ακτινοβολίας. που σημαίνει ότι η (σχ. 1) γίνεται:

$$R \gg a^2/2\lambda \qquad (2)$$

Και επειδή $d = 2a$ τότε θα έχουμε:

$$R \gg d^2/8\lambda \qquad (3)$$

Π.χ. για $d = 2\text{mm}$ και $\lambda = 0.5\times10^{-3}\text{mm}$ (ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος), βρίσκουμε: $R \gg 1\text{m}$. Στην πράξη αν η απόσταση R γίνει $1.5-2\text{m}$ τότε θα έχουμε συμβολή μακρινού πεδίου. Δηλ. μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σ' εκείνη την περιοχή (περί το O') τα δύο σφαιρικά μετ. κύματος που προέρχονται από τις πηγές S_1, S_2 συμβάλλουν σαν σχεδόν επίπεδα. Στην περίπτωση αυτή οι δημιουργούμενοι κροσσοί συμβολής στο πέτασμα, με προσανατολισμό κάθετο σε σχέση με τη διεύθυνση μεταξύ των S_1, S_2 είναι ευθύγραμμοι. Αν βέβαια απομακρυνόμαστε πολύ από τα πέριξ του οπτικού άξονα (στη θέση που σχηματίζεται το πρότυπο συμβολής), θ' αρχίσει να γίνεται εμφανής η υπερβολικής μορφής καμπύλωση των κροσσών (βλ. (§ 6.4.1) (Σχ. 6.4.1.15)).

Μια ακριβέστερη ανάλυση του εντοπισμού της περιοχής μακρινού πεδίου γίνεται στο (Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός (Άσκ. 1 Λυμένη)). στην περίπτωση αυτή ο τύπος της (σχ. 3) παίρνει τη μορφή:

$$R > d^2/\lambda \qquad (4)$$

Τη συνθήκη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα, όταν αυτό απαιτηθεί.

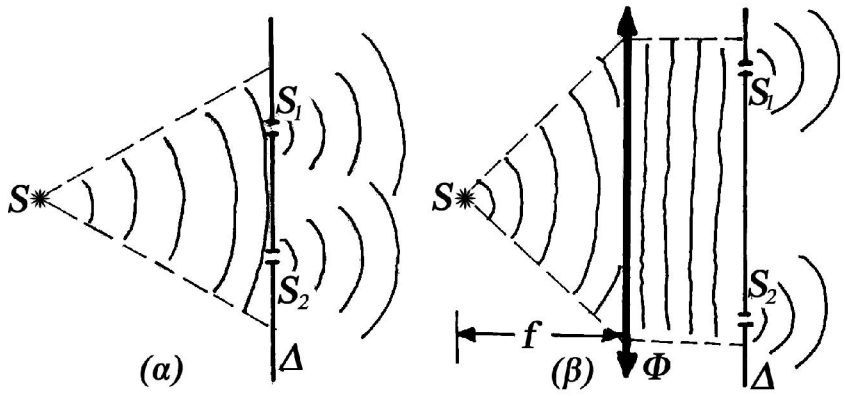
Με ένα διαφορετικό τρόπο ο καθορισμός της περιοχής μακρινού πεδίου περιγράφεται ως εξής: Οι ακτίνες κατά μήκος των οποίων διαδίδονται δύο διαταραχές προκειμένου να συμβάλλουν σ' ένα σημείο του πετάσματος, θα πρέπει να είναι σχεδόν παράλληλες. Για να συμβεί όμως αυτό – όπως ήδη έχουμε αναφέρει – η απόσταση μεταξύ των δύο δευτερευόντων πηγών πρέπει να είναι πολύ μικρή σε σχέση με την απόσταση του πετάσματος από αυτές (θέση πετάσματος θεωρητικά στο άπειρο). Ένας τρόπος λήψεις προτύπου συμβολής μακρινού πεδίου σ' εργαστηριακή κλίμακα, είναι με τη βοήθεια ενός θετικού φακού εστιακής απόστασης f. Ο φακός (Σχ. 6.4.1.10) θα πρέπει να τοποθετηθεί σχεδόν σ' επαφή (ή σε απόσταση f) από τις δύο δευτερεύουσες σημειακές πηγές. Τότε στο πίσω εστιακό του επίπεδο (δηλ. σε απόσταση f από αυτόν) όπως αποδεικνύεται (βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός (§ 7.3)), θα λάβουμε το πρότυπο συμβολής μακρινού πεδίου. Πράγματι γίνεται εύκολα κατανοητό ότι οι δύο διαταραχές που ακολουθούν πορείες παράλληλες και που προέρχονται αντίστοιχα από τις δύο δευτερεύουσες πηγές, αντί να συμβάλλουν σε άπειρη απόσταση, με τη βοήθεια του φακού συμβάλλουν σ' ένα καθορισμένο σημείο στο πίσω εστιακό του επίπεδο με την ίδια βέβαια διαφορά φάσης που εισάγεται από το φακό.

Τέλος ένας άλλος σημαντικός παράγοντας που θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψη μας κατά τη διαδικασία της συμβολής είναι η κατάσταση πόλωσης των δεσμών. Για τις περιπτώσεις που δεν αναφέρουμε κάτι το διαφορετικό, τα πεδία των προς επαλληλία διαταραχών θα θεωρούνται ότι είναι γραμμικά πολωμένα με διευθύνσεις παράλληλες μεταξύ τους.

Κατανομή της έντασης του φωτός από τη συμβολή δύο σφαιρικών μετ. κύματος στην προσέγγιση του μακρινού πεδίου

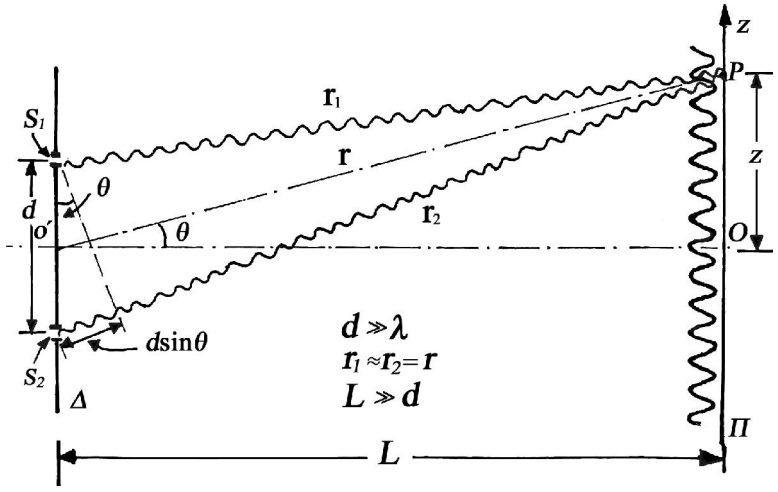
Το προς διαίρεση αρχικό μέτωπο κύματος, μπορεί να είναι κατ' αρχή σφαιρικό (Σχ. 6.4.1.2α) προερχόμενο από μια σημειακή πηγή τοποθετημένη σε συμμετρική θέση ως προς το διάφραγμα Δ που περιλαμβάνει τα δύο επίσης σημειακά ανοίγματα, σε μια ορισμένη απόσταση από αυτό. Επίσης μπορεί να είναι επίπεδο (Σχ. 6.4.1.2β), γεγονός που επιτυγχάνεται κατά τα γνωστά όταν η προαναφερόμενη σημειακή πηγή τοποθετηθεί στο εμπρός εστιακό επίπεδο θετικού φακού Φ εστιακής απόστασης f. Με τις διατάξεις αυτές, επιτυγχάνεται πλήρης χωρική συμφωνία (εφόσον βέβαια η πηγή S είναι σημειακή) μεταξύ των σφαιρικών μετώπων κύματος των προερχομένων από τις δευτερεύουσες πηγές. Μια δεύτερη παραδοχή που

αφορά τους υπολογισμούς μας είναι ότι το εκπεμπόμενο φως από την πηγή S είναι μεγάλου βαθμού χρονικής συμφωνίας (π.χ. προέρχεται από πηγή Laser) δηλ. το μήκος των κυματοσυρμών του είναι πολύ μεγάλο. Με βάση αυτές τις υποθέσεις, από τα δύο σημειακά ανοίγματα S_1, S_2 του διαφράγματος Δ θα εκπέμπονται δύο σύμ-



(Σχ. 6.4.1.2)

φωνα μεταξύ τους σφαιρικά μέτωπα κύματος τα οποία ερχόμενα σε επαλληλία στο πέτασμα Π που απέχει απόσταση $L \gg d$ (d: η απόσταση μεταξύ των ανοιγμάτων), θα συμβάλλουν. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης φαίνονται (Σχ. 6.4.1.3).



(Σχ. 6.4.1.3)

Θέλουμε να υπολογίσουμε κατ' αρχή την συνολική ένταση του ηλ. πεδίου $E_{ολ.}$ σ' ένα σημείο P του πετάσματος Π, καθώς και την ένταση του φωτός I, που οφείλονται στις διαταραχές τις προερχόμενες από τις S_1, S_2. Κατόπιν τις κατανομές

τους από σημείο πάνω στο πέτασμα. Αν $E_1(r,t), E_2(r,t)$ είναι οι τιμές των διαταραχών στο σημείο P, τότε με βάση την αρχή της επαλληλίας θα έχουμε:

$$E_{o\lambda.} = E_1(r,t) + E_2(r,t) \tag{6.4.1.1}$$

Σημείωση

Για συνθήκες μακρινού πεδίου τα τμήματα $S_1P = r_1, S_2P = r_2$ είναι σχεδόν παράλληλα, δεδομένου ότι οι υπολογισμοί για το συνολικό πεδίο γίνονται αρκετά κοντά στο κέντρο συμμετρίας O του πετάσματος Π που απέχει αρκετά από το διάφραγμα Δ. Επομένως τα διανύσματα $\mathbf{E}_1(r,t), \mathbf{E}_2(r,t)$ είναι πάντα παράλληλα μεταξύ τους και για το λόγο αυτό στους υπολογισμούς μας λαμβάνονται σαν βαθμωτά μεγέθη.

Επειδή ομιλούμε για σφαιρικά μέτωπα κύματος η (σχ. 6.4.1.1) γράφεται ως εξής:

$$E_{o\lambda} = \frac{E_{o1}}{r_1}\cos(\omega t\text{-}kr_1 + \varphi_1) + \frac{E_{o2}}{r_2}\cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2) \tag{6.4.1.2}$$

όπου ϕ_1, ϕ_2 οι αρχικές φάσεις με τις οποίες εκπέμπονται τα κύματα από τα σημεία S_1, S_2. Αν η πηγή S βρισκόταν σε συμμετρική θέση σε σχέση με τις S_1, S_2 (όπως π.χ. στα (Σχ. 6.4.1.2) τότε $\phi_1 = \phi_2$, διαφορετικά $\phi_1 - \phi_2 \neq 0$. Γνωρίζουμε επίσης (σχ. 6.2.4,5) ότι η ένταση του φωτός I στο P δίνεται από τη σχέση:

$$I = \langle |\mathbf{S}_{o\lambda}| \rangle = \frac{1}{\tau}\int_o^\tau |\mathbf{S}_{o\lambda}|\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\tau}\int_o^\tau \varepsilon_o c E_{o\lambda}^2 dt =$$

$$= \varepsilon_o c \frac{1}{\tau}\int_o^\tau E_{o\lambda}^2 dt = \varepsilon_o c \langle E_{o\lambda}^2 \rangle_\tau \tag{6.4.1.3}$$

όπου $|\mathbf{S}| = \varepsilon_0 c^2 |\mathbf{E}\times\mathbf{B}|$ το μέτρο του διανύσματος Poynting, $\mathbf{B} = \mathbf{E}/c$, τ ο χρόνος ολοκλήρωσης του χρησιμοποιούμενου ανιχνευτή και $\langle\ \rangle_\tau$ το σύμβολο της μέσης χρονικής τιμής μιας συνάρτησης του χρόνου, δηλ.

$$\langle f(t) \rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_o^\tau f(t)\,dt \tag{6.4.1.4}$$

Επομένως:

$$I = \varepsilon_o c \left\langle \left[\frac{E_{o1}}{r_1} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1) + \frac{E_{o2}}{r_2} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2) \right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\frac{E_{o1}}{r_1} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1) + \frac{E_{o2}}{r_2} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2) \right] \right\rangle_\tau \qquad (6.4.1.5)$$

και μετά τις πράξεις:

$$I = \varepsilon_o c \left\langle \frac{E_{o1}^2}{r_1^2} \cos^2\left(\omega t - kr_1 + \varphi_1\right) \right\rangle_\tau + \varepsilon_o c \left\langle \frac{E_{o1}}{r_1} \frac{E_{o2}}{r_2} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1) \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2) \right\rangle_\tau +$$

$$+ \varepsilon_o c \left\langle \frac{E_{o1}}{r_1} \cdot \frac{E_{o2}}{r_2} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1) \cdot \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2) \right\rangle_\tau + \varepsilon_o c \left\langle \frac{E_{o2}^2}{r_2^2} \cos^2\left(\omega t - kr_2 + \varphi_2\right) \right\rangle_\tau \qquad (6.4.1.6)$$

οπότε εξαιτίας του ότι οι μέσες τιμές των $\cos^2(\ )$ του πρώτου και του τετάρτου όρου είναι ίσες με $1/2$ θα είναι:

$$I = \frac{\varepsilon_o c}{2} \frac{E_{o1}^2}{r_1^2} + \frac{\varepsilon_o c}{2} \frac{E_{o2}^2}{r_2^2} + 2\varepsilon_o c \frac{E_{o1} E_{o2}}{r_1 r_2} \left\langle \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1) \cdot \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2) \right\rangle_\tau \qquad (6.4.1.7)$$

Επειδή όμως: $\cos \cdot \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(a - \beta)$

θα έχουμε:

$$I = \frac{\varepsilon_o c}{2} \frac{E_{o1}^2}{r_1^2} + \frac{\varepsilon_o c}{2} \frac{E_{o2}^2}{r_2^2} +$$

$$+ 2\varepsilon_o c \frac{E_{o1} E_{o2}}{r_1 r_2} \left\{ \left\langle \frac{1}{2} \cos[2\omega t - k(r_1 + r_2) + \varphi_1 + \varphi_2] \right\rangle_\tau + \left\langle \frac{1}{2} \cos[k(r_2 - r_1) + (\varphi_1 - \varphi_2)] \right\rangle_\tau \right\} \qquad (6.4.1.8)$$

και τελικά εξαιτίας του ότι ο πρώτος του τρίτου όρου της (σχ.6.4.1.8) είναι μηδέν:

$$I = \frac{\varepsilon_o c}{2} \frac{E_{o1}^2}{r_1^2} + \frac{\varepsilon_o c}{2} \frac{E_{o2}^2}{r_2^2} + \varepsilon_o c \frac{E_{o1} E_{o2}}{r_1 r_2} \cos\{k(r_2 - r_1) + (\varphi_1 - \varphi_2)\} \qquad (6.4.1.9)$$

Εάν αντικαταστήσουμε όπου $I_1 = \frac{\varepsilon_o c}{2} \frac{E_{o1}^2}{r_1^2}$ και $I_2 = \frac{\varepsilon_o c}{2} \frac{E_{o2}^2}{r_2^2}$

τότε θα ισχύει: $\varepsilon_o c \frac{E_{o1}}{r_1} \cdot \frac{E_{o2}}{r_2} = 2\sqrt{I_1 I_2}$ οπότε η (σχ. 6.4.1.9) γίνεται:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left[k(r_2 - r_1) + (\varphi_\iota - \varphi_2)\right] \qquad (6.4.1.10)$$

όπου I_1, I_2 οι εντάσεις στο σημείο P που προέρχονται από τις πηγές S_1, S_2 ξεχωριστά και

$$\delta = k(r_2 - r_1) + (\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (6.4.1.11)$$

η συνολική διαφορά φάσης μεταξύ των δύο διαταραχών στο σημείο P. $k(r_2 - r_1)$ είναι η διαφορά φάσης που οφείλεται στη διαφορά δρόμου μεταξύ των δύο διαταραχών και $\phi_1 - \phi_2$ λόγω των αρχικών φάσεων εκπομπής από τις πηγές S_1, S_2.

Σημείωση

Οι εντάσεις I_1, I_2 εφόσον η πηγή S βρίσκεται σε συμμετρική θέση σε σχέση με τις S_1, S_2 και οι υπολογισμοί μας γίνονται για συνθήκες μακρινού πεδίου $r_1 \simeq r_2 \simeq r$, θα είναι ίσες μεταξύ τους επειδή $E_{01} = E_{02}$. Δηλ. τα πλάτη των διαταραχών στα σημεία S_1 και S_2 είναι ίδια. Θα είναι διαφορετικές μεταξύ τους εφόσον κατά κάποιο τρόπο $E_{01} \neq E_{02}$,το οποίο θα μπορούσε να συμβεί π.χ. αν μπροστά από μία από τις S_1, S_2 τοποθετούσαμε ένα ουδέτερο φίλτρο το οποίο θ' απορροφούσε ποσοστό της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, που αντιστοιχεί σε ελάττωση του πλάτους του διαδιδόμενου πεδίου. Βέβαια ταυτόχρονα στο άλλο άνοιγμα θα έπρεπε να τοποθετήσουμε μια γυάλινη πλάκα ίσου πάχους με το φίλτρο και ίδιου δ.δ. προκειμένου ν' αντισταθμίσουμε την προκύπτουσα διαφορά οπτικού δρόμου.

Βλέπουμε λοιπόν ότι εφόσον οι S_1, S_2 είναι σύμφωνες μεταξύ τους, η συνολική ένταση I στο σημείο P δεν είναι ίση με το άθροισμα $I_1 + I_2$ αλλά μπορεί να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από αυτήν εξαρτώμενη από τις τιμές της δ. Μέγιστα έντασης θα έχουμε όταν $\cos\delta = 1$, οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \\ \delta = 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi, \ldots \text{ ή } \quad \delta = 2m\pi, \quad m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2 \end{array}\right\} \qquad (6.4.1.12)$$

Όταν $\cos\delta = -1$ τότε η συνολική ένταση θα παίρνει τη μικρότερη τιμή:

$$\left.\begin{array}{l} I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \\ \delta = \pm\pi,\ \pm 3\pi, \ldots \text{ ή } \quad \delta = (2m+1)\pi, \quad m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2 \ldots \end{array}\right\} \qquad (6.4.1.13)$$

Για $\delta = \pi/2$ ή γενικά $\delta = (2m+1)\pi/2 \;\; m = 0, \pm 1, \pm 2...$

Θα έχουμε: $\cos\delta = 0$ οπότε: $I = I_1 + I_2$

Από το (Σχ. 6.4.1.3), βλέπουμε ότι η διαφορά οπτικού δρόμου των διαταραχών στο σημείο P του πετάσματος Π, που απέχει απόσταση L από το διάφραγμα Δ θα δίνεται από τη σχέση:

$$S_2P - S_1P = r_2 - r_1 \simeq d\sin\theta \qquad (6.4.1.14)$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των S_1, S_2 και της καθέτου από το S_1 στην S_2P. Επίσης από το τρίγωνο $O'OP$ θα έχουμε:

$$\tan\theta = OP/L = z/L \qquad (6.4.1.15)$$

όπου z η συντεταγμένη του P σε σχέση με τον άξονα Oz. Επειδή όπως ήδη αναφέραμε το πρότυπο συμβολής μακρινού πεδίου εντοπίζεται περί το O, θα είναι δυνατές οι προσεγγίσεις $\tan\theta \simeq \sin\theta \simeq \theta\,[\text{rad}]$. Επομένως από τις δύο προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε:

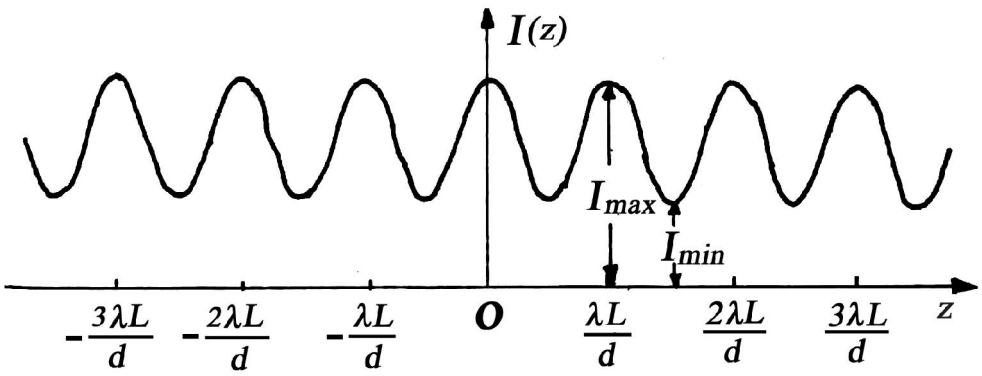
$$r_2 - r_1 = dz/L \qquad (6.4.1.16)$$

Τότε με τη βοήθεια της (σχ. 6.4.1.10), η κατανομή της έντασης στο πέτασμα συναρτήσει του z θα δίνεται από την:

$$I_1 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left[\frac{2\pi dz}{\lambda L} + (\varphi_1 - \varphi_2)\right] \qquad (6.4.1.17)$$

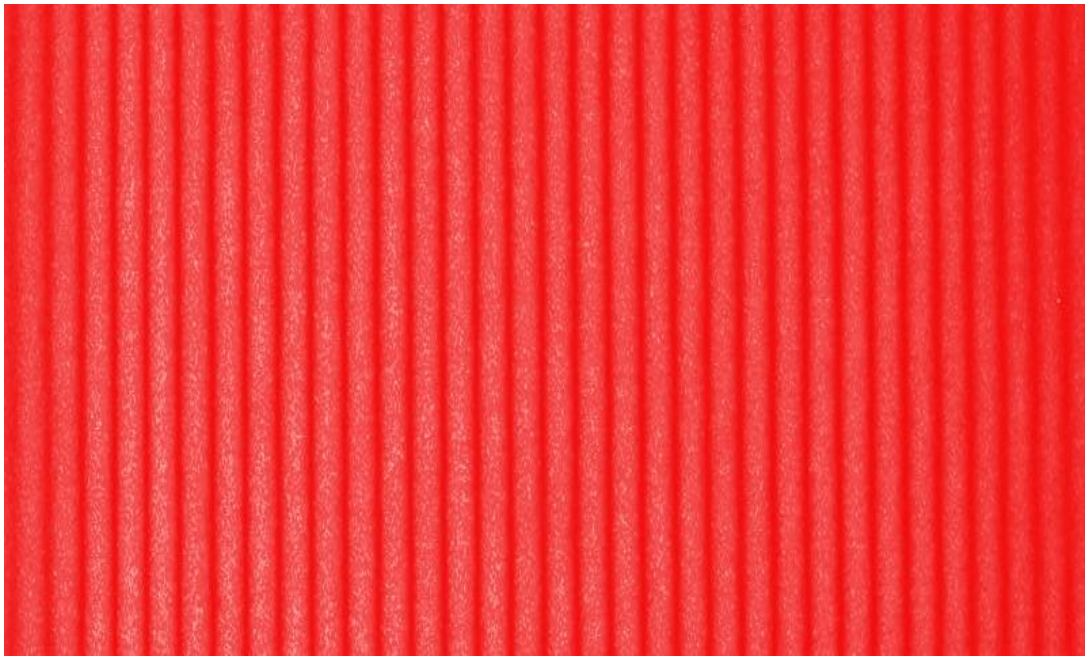
όπου έγινε η αντικατάσταση: $k = 2\pi/\lambda$. Η γραφική παράσταση της (σχ. 6.4.1.17) για $\phi_1 = \phi_2$ δίνεται στο (Σχ. 6.4.1.4) και παριστάνει μια αρμονικής μορφής περιοδική μεταβολή της έντασης του φωτός. Μέγιστα συμβολής θα έχουμε σε θέσεις για τις οποίες $z = m\lambda L/d \;\; m = 0, \pm 1, \pm 2,..$ και ελάχιστα όταν: $z = (2m+1)\lambda L/2d \;\; m = 0, \pm 1, \pm 2,.$ Βλέπουμε ότι στο σημείο $z = 0$ συναντούμε μέγιστο. Το πρότυπο συμβολής αποτελείται από ισαπέχοντες κροσσούς (ίσης περιόδου) όπως φαίνεται στην (Εικ. 6.4.1.5). Πράγματι για δύο διαδοχικά μέγιστα m και $m+1$ θα έχουμε:

$$z_{m+1} - z_m = (m+1)\frac{\lambda L}{d} - m\frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda L}{d} = T \qquad (6.4.1.18)$$



(Σχ. 6.4.1.4)

όπου T' είναι η περίοδος των κροσσών συμβολής. Για λ και L σταθερά η περίοδος θα είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης d μεταξύ των δύο πηγών S_1, S_2.

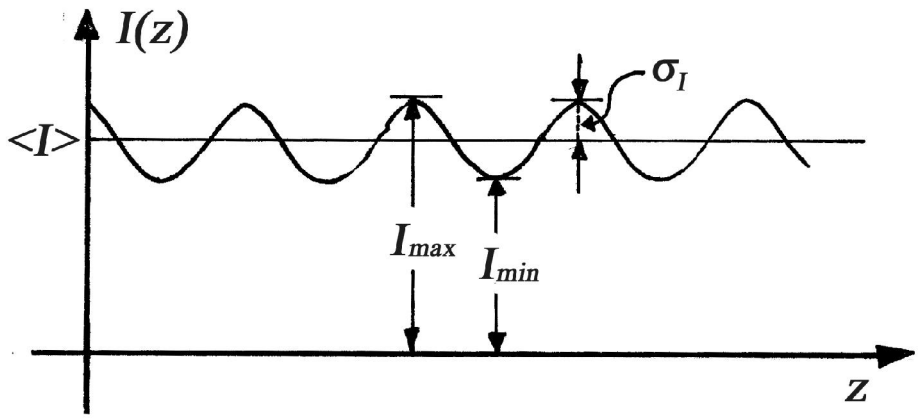


(Εικ. 6.4.1.5)

Φωτοαντίθεση (ευκρίνεια) των κροσσών συμβολής

Τα ελάχιστα των κροσσών συμβολής είναι μηδενικά κάτω από ορισμένες μόνο συνθήκες και συγκεκριμένα για την περίπτωση που τα πλάτη των διαταραχών από τις πηγές S_1, S_2 είναι ίσα δηλ. $E_{01} = E_{02}$. Η τελευταία σημαίνει ότι θα είναι και $I_1 = I_2$ οπότε από τη (σχ. 6.4.1.13): $I_{\min} = 0$. Κροσσοί με μηδενικά ελάχιστα είναι πολύ περισσότερο ευκρινείς όπως φαίνεται στην (Εικ. 6.4.1.7) σε σχέση με αυτούς

της (Εικ. 6.4.1.5). Ένα μέτρο της ευκρίνειας των κροσσών είναι το μέγεθος που ονομάζεται φωτοαντίθεση. Ο όρος της ***φωτοαντίθεσης (contrast)*** ή της ***ευκρίνειας (visibility)*** των κροσσών συμβολής αφορά ένα στατιστικό μέγεθος το οποίο ορίζεται με τον εξής τρόπο. Έστω ότι μας δίνεται η γραφική παράσταση του (Σχ. 6.4.1.6). Πρόκειται για την κατανομή της έντασης $I(z)$ συναρτήσει της απόστασης z ενός προτύπου κροσσών συμβολής κάθετα προς τη διεύθυνση σχηματισμού τους. Και όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, οι κροσσοί συμβολής δεν έχουν μηδενικά



(Σχ. 6.4.1.6)

ελάχιστα αλλά διαμορφώνονται με βάση ένα σταθερό υπόβαθρο έντασης που έχει μια μέση τιμή $\langle I \rangle$. Η ύπαρξη των κροσσών οφείλεται στην απόκλιση από τη μέση τιμή, που τη συμβολίζουμε με σ_I.

Τότε η φωτοαντίθεση των κροσσών $\mathcal{V}$ ορίζεται από τη σχέση:

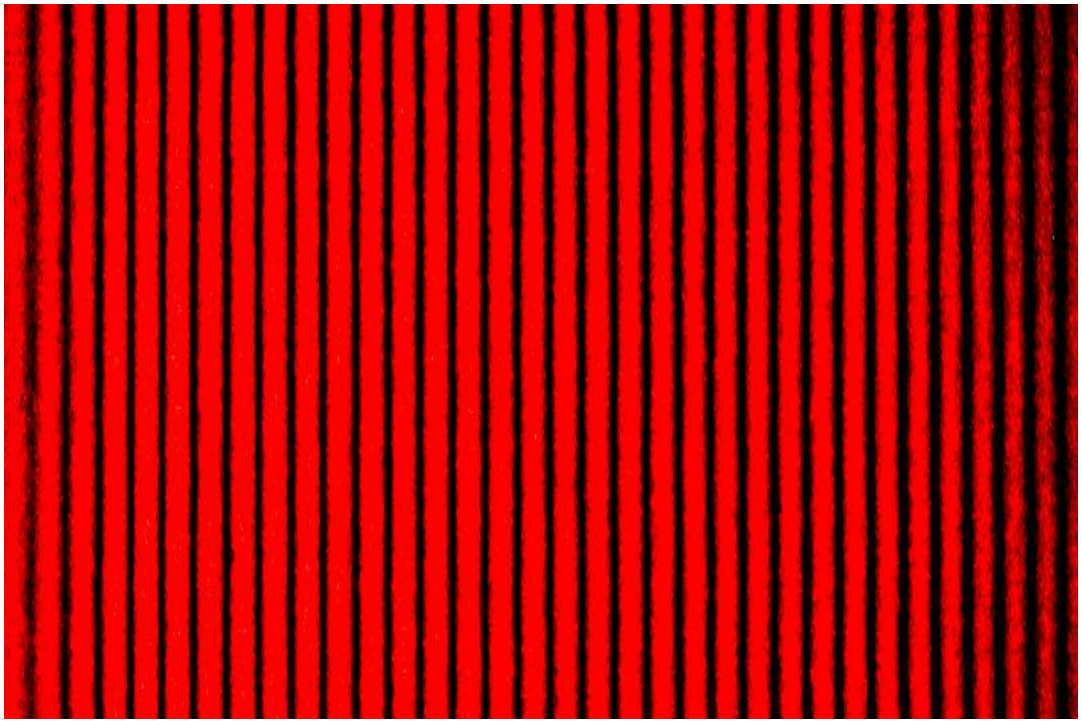
$$\mathcal{V} = \sigma_I / \langle I \rangle \qquad (6.4.1.19)$$

Δηλ. από το λόγο της απόκλισης από τη μέση τιμή της έντασης προς τη μέση της τιμή. Η απόκλιση από τη μέση τιμή της I ορίζεται αυστηρά από τη γνωστή σχέση: $\sigma_I = \sqrt{\left\langle \left(I - \langle I \rangle \right)^2 \right\rangle}$. Αλλά για την περίπτωσή μας θα είναι: $2\sigma_I = I_{\max} - I_{\min}$. Οπότε: $\sigma_I = \left(I_{\max} - I_{\min} \right)/2$ και $\langle I \rangle = I_{\max} - \sigma_I = I_{\max} - \left(I_{\max}/2 \right) + \left(I_{\min}/2 \right) \Rightarrow \langle I \rangle = \left(I_{\max} + I_{\min} \right)/2$. Και με την αντικατάσταση των $\sigma_I, \langle I \rangle$ βρίσκουμε:

$$\mathcal{V} = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \qquad (6.4.1.20)$$

Η τελευταία σχέση συνιστά ένα μέτρο της ευκρίνειας των κροσσών συμβολής. Τότε με τη βοήθεια των (σχ. 6.4.1.12,13) για τις οποίες $I_1 \neq I_2$ βρίσκουμε:

$$\mathcal{V} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \qquad (6.4.1.21)$$

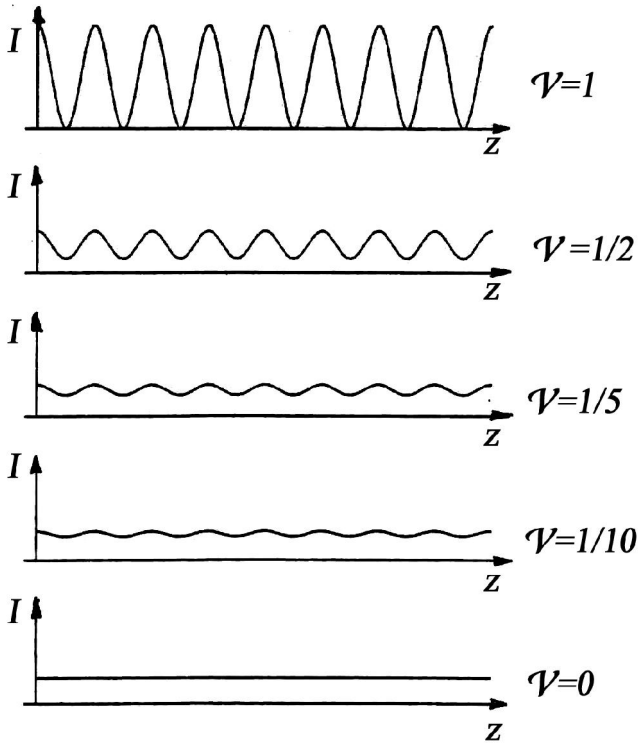


(Εικ. 6.4.1.7)

Όταν $I_1 = I_2$, από τη (σχ. 6.4.1.21) βρίσκουμε $\mathcal{V} = 1$, δηλ. θα έχουμε τη μέγιστη φωτοαντίθεση (μηδενική ελάχιστα). Γενικά θα είναι: $0 \leq \mathcal{V} \leq 1$. Στο (Σχ. 6.4.1.8) βλέπουμε τη γραφική παράσταση της ευκρίνειας των κροσσών συμβολής του Young για διάφορες τιμές της φωτοαντίθεσης από $\mathcal{V} = 1$ έως $\mathcal{V} = 0$.

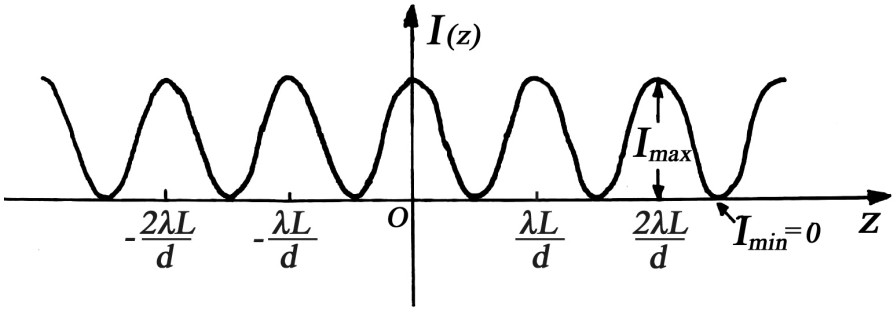
Στην πραγματικότητα, η φωτοαντίθεση των κροσσών δεν εξαρτάται μόνο από το λόγο των εντάσεων I_1 και I_2 αλλά και από το βαθμό της χωρικής και χρονικής συμφωνίας των συσχετιζόμενων διαταραχών. Ο υπολογισμός της $\mathcal{V}$ για την περίπτωση της συμβολής δύο μετ. κύματος τα οποία έχουν μεν αρκετά μεγάλο βαθμό χρονικής συμφωνίας αλλά είναι μερικά χωρικά σύμφωνα, γίνεται στο (ΘΕΜΑ 2). Όταν γενικά $I_1 = I_2 = I_0$ και για $\phi_1 = \phi_2$ η (σχ. 6.4.1.17) γίνεται:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi dz}{\lambda L} \qquad (6.4.1.22)$$



(Σχ. 6.4.1.8)

και η γραφική παράσταση της $I(z)$ δίνεται στο (Σχ. 6.4.1.9). Από αυτήν βλέπουμε ότι $I_{\min} = 0$ με συνέπεια η φωτοαντίθεση των σχηματιζόμενων κροσσών συμβολής να είναι η μέγιστη (Εικ. 6.4.1.7).

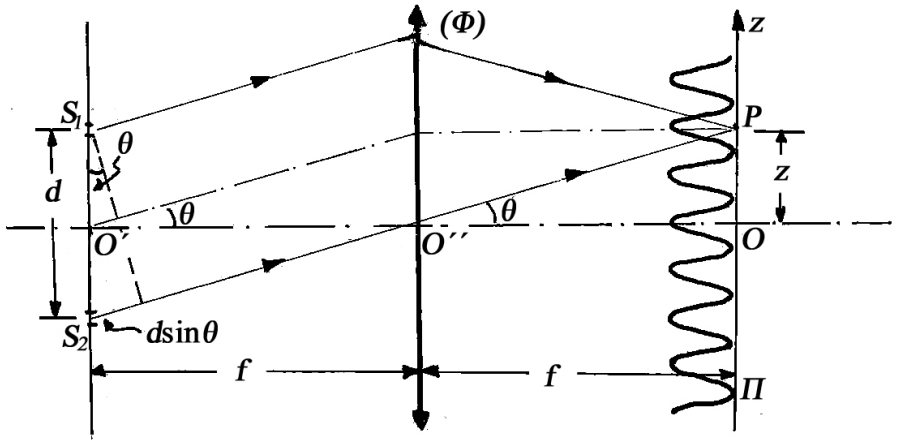


(Σχ. 6.4.1.9)

Διάταξη λήψης προτύπου συμβολής μακρινού πεδίου με τη βοήθεια φακού

Η λήψη των προτύπων συμβολής μακρινού πεδίου, λόγω της σχετικά μεγάλης απόστασης του πετάσματος Π από τις πηγές S_1, S_2 δεν είναι εργαστηριακά λει-

τουργική. Για το λόγο αυτό με βάση τα όσα επικαλεσθήκαμε στην εισαγωγή της (§ 6.4.1) χρησιμοποιούμε τελικά τη διάταξη του (Σχ. 6.4.1.10). Εκεί, ακριβώς μπροσ-



(Σχ. 6.4.1.10)

τά από τις S_1, S_2 ή σε απόσταση f από αυτές, τοποθετούμε θετικό (συγκλίνοντα) φακό Φ. f είναι η εστιακή του απόσταση. Αποδεικνύεται (βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός (§ 7.3)) ότι στο πίσω εστιακό επίπεδο του φακού Φ, παίρνουμε το πρότυπο συμβολής μακρινού πεδίου που προκύπτει από την επαλληλία των διαταραχών των προερχομένων από τις πηγές S_1, S_2. Η γωνία θ με την οποία διαδίδονται δύο διαταραχές προκειμένου να συμβάλλουν σ' ένα σημείο P, είναι ακριβώς ίδια με αυτήν η οποία φαίνεται από το σημείο O'' του κέντρου του φακού. Επομένως $\tan\theta \simeq \sin\theta = z/f\,[\mathrm{rad}]$ και οι (σχ. 6.4.1.17,22) ισχύουν, με μόνη τη διαφορά ότι θα πρέπει ν' αντικατασταθεί η απόσταση L με την εστιακή απόσταση του φακού f.

Μέση χωρική τιμή της έντασης του φωτός στο πρότυπο συμβολής

Η αυξομείωση της έντασης του φωτός στο επίπεδο Π δηλ. η εμφάνιση των κροσσών συμβολής, μας προϊδεάζει κατ' αρχή να υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η αρχή της διατήρησης της ενέργειας. Η τελευταία εκφράζεται από το γεγονός ότι η συνολική ένταση του φωτός από σημείο σε σημείο θα πρέπει να είναι σταθερή και ίση με το άθροισμα $I_1 + I_2$ των εντάσεων που προκύπτουν από την κάθε πηγή ξεχωριστά. Για να εξάγουμε σωστά συμπεράσματα θα πρέπει να εξετάσουμε το πρόβλημα στατιστικά δηλ. να υπολογίσουμε τη μέση χωρική τιμή της έντασης του φωτός σε μια περιοχή που περιλαμβάνεται ένας πολύ μεγάλος αριθμός κροσσών συμβολής.

Για να συμβεί αυτό (δεδομένου ότι για να σχηματιστεί ένας κροσσός απαιτείται διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ των δύο συμβαλλουσών διαταραχών ίση προς ένα μ.κ. λ), θα πρέπει η τιμή του $r_2 - r_1$, να είναι πολύ μεγαλύτερη του λ και επειδή η μέγιστη διαφορά $r_2 - r_1$ είναι ίση με d θα πρέπει τελικά $d \gg \lambda$ όπου d η απόσταση μεταξύ των πηγών S_1, S_2. Στο επόμενο παράδειγμα μπορούμε να βρούμε την απάντηση σ' αυτό το ερώτημα.

Παράδειγμα 2

α) Ν' αποδειχθεί ότι η μέση χωρική τιμή της έντασης I του φωτός όπως αυτή υπολογίζεται στο πείραμα του Young, είναι ίση με το άθροισμα των επί μέρους εντάσεων I_1, I_2 για την περίπτωση όπου $d \gg \lambda$, όπου d η απόσταση μεταξύ των πηγών και λ τα μέσο μήκος κύματός τους. (β) Τι ακριβώς συμβαίνει όταν $d \ll \lambda$.

- α) Επειδή $d \gg \lambda$, πάνω στο πέτασμα Π που συσχετίζονται τα δύο μέτωπα κύματος, ο αριθμός των κροσσών συμβολής θα είναι πολύ μεγάλος. Τα προαναφερόμενα δικαιολογούνται – όπως ήδη αναφέραμε – ως εξής: Κατ' αρχή για το σχηματισμό ενός κροσσού, η διαφορά οπτικού δρόμου $r_2 - r_1$, θα πρέπει να είναι ίση με ένα μ.κ. λ. Κατά δεύτερο λόγο, η μέγιστη διαφορά $r_2 - r_1 = d$ οπότε και με βάση την αρχική μας υπόθεση $d \gg \lambda$. Άρα ο αριθμός των σχηματιζόμενων κροσσών θα μπορούσε να είναι διπλάσιος του λόγου d/λ ο οποίος είναι πολύ μεγάλος αριθμός.

Η ένταση του φωτός από τη (σχ. 6.4.1.10) για $\phi_1 = \phi_2$ θα είναι:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left[k\left(\mathrm{r}_2 - r_1\right)\right] \tag{6.4.1.23}$$

Επομένως η μέση χωρική τιμή της έντασης του φωτός για ένα χωρικό διάστημα ολοκλήρωσης (έστω ακόμη και αν αυτό είναι το d) όπου $d \gg \lambda$ θα είναι:

$$\langle I \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\left\langle \cos\left[k\left(r_2 - r_1\right)\right]\right\rangle_d \tag{6.4.1.24}$$

επειδή: $\langle I_1 \rangle = I_1, \langle I_2 \rangle = I_2$ και $\left\langle \sqrt{I_1 I_2} \right\rangle = \sqrt{I_1 I_2}$. Αλλά: $r_2 - r_1 = d\sin\theta$ (σχ. 6.4.1.14) και $\sin\theta \simeq z/f$. Τότε η (σχ. 6.4.1.24) γίνεται:

$$\langle I \rangle = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2}\left\langle \cos\frac{2\pi dz}{\lambda f}\right\rangle_d \tag{6.4.1.25}$$

Επομένως $\left\langle \cos\frac{2\pi dz}{\lambda f} \right\rangle_d = \frac{1}{d}\int_o^d \cos\frac{2\pi dz}{\lambda f} dz = \frac{f}{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin\frac{2\pi d^2}{\lambda f}$. Και επειδή: $d \gg \lambda, -1 \le \sin\phi \le 1$ όπου $\phi = 2\pi d^2/\lambda f$, ο παράγοντας $(\lambda/d)^2$ θα είναι πάρα πολύ μικρός οπότε: $\left\langle \cos\frac{2\pi dz}{\lambda f'} \right\rangle_d \to 0$. Άρα η (σχ. 6.4.1.25) γίνεται:

$$\langle I \rangle = I_1 + I_2 \tag{6.4.1.26}$$

και αν: $I_1 = I_2 \quad \langle I \rangle = 2I_1$ (6.4.1.27)

Επομένως η μέση χωρική τιμή της έντασης του φωτός στο επίπεδο που σχηματίζονται οι κροσσοί συμβολής, είναι σταθερή και ίση με το άθροισμα $I_1 + I_2$ των επί μέρους εντάσεων που προκαλούν η κάθε μια πηγή ξεχωριστά. Άρα θα ισχύει η αρχή της διατήρησης της ενέργειας παρά τις αυξομειώσεις της έντασης του φωτός που παρατηρείται στο πρότυπο συμβολής. Τα προαναφερόμενα πάντα με την προϋπόθεση ότι $d \gg \lambda$ που σημαίνει ότι η μέση χωρική τιμή της συνολικής έντασης λαμβάνεται για περιοχή όπου υπάρχει μεγάλος αριθμός κροσσών συμβολής.

β) Όταν ισχύει $d \ll \lambda$, μπορούμε να πούμε ότι οι πηγές S_1, S_2 βρίσκονται πάρα πολύ κοντά μεταξύ τους ή προσεγγιστικά εκπέμπουν στον ίδιο χώρο. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, ο υπολογισμός της μέσης χωρικής τιμής $\langle I \rangle$ της έντασης I του φωτός για το πρότυπο συμβολής, οδηγεί σ' ένα παράξενο κατ' αρχή αλλά όχι ανεξήγητο αποτέλεσμα όπως θα δούμε στα επόμενα. Πράγματι από τη (σχ. 6.4.1.23) θα έχουμε:

$$\langle I \rangle = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2}\left\langle \cos\frac{2\pi dz}{\lambda f} \right\rangle_d \tag{6.4.1.28}$$

Και επειδή $d \ll \lambda \;\Rightarrow\; \left\langle \cos\frac{2\pi dz}{\lambda f} \right\rangle_d \cong 1$ (6.4.1.29)

οπότε η (σχ. 6.4.1.28) γίνεται:

$$\langle I \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cong 2(I_1 + I_2) \quad (\mathrm{I}_1 \cong I_2) \tag{6.4.1.30}$$

και αν υποθέσουμε ότι $I_1 = I_2$ τότε:

$$\langle I \rangle = 4I_1 \qquad (6.4.1.31)$$

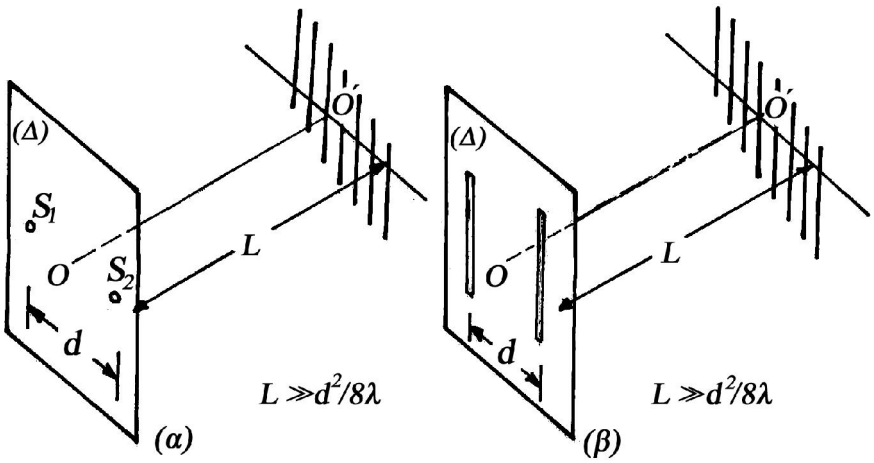
Δηλ. η μέση χωρική τιμή είναι τετραπλάσια αυτής της κάθε πηγής στο επίπεδο που σχηματίζονται οι κροσσοί συμβολής.

Το τι ακριβώς συμβαίνει στην περίπτωση αυτή, θα μπορούσε να εξηγηθεί σχετικά εύκολα θεωρώντας τις πηγές S_1, S_2 σαν εκπέμποντα δίπολα κεραιών που βρίσκονται ακριβώς στον ίδιο χώρο. Εφόσον όμως συμβαίνει οι κεραίες να εκπέμπουν σε στενή αλληλεπίδραση, τότε τα παραγόμενα από αυτές Η/Μ πεδία δρουν στα ταλαντούμενα φορτία των κεραιών. Δηλ. οι ασκούμενες δυνάμεις στα φορτία της μιας κεραίας δεν είναι μόνο αυτές που προκαλούν την εκπομπή από την ίδια αλλά και αυτές που προκαλούνται από το εκπεμπόμενο πεδίο της άλλης λόγω της στενής γειτνίασης μεταξύ τους . Υποθέσαμε εξ αρχής όμως ότι οι κεραίες (σαν πηγές) εκπέμπουν σε φάση, άρα και τα ρεύματα που τις διατρέχουν θα βρίσκονται σε φάση. Αν θεωρήσουμε τις πηγές πανομοιότυπες, τότε και η τελική αντίσταση που θα εμφανίζει η κάθε μια στην κίνηση των φορτίων (ρευμάτων) θα είναι διπλάσια από εκείνη την περίπτωση που οι κεραίες θα ήταν απομακρυσμένες μεταξύ τους. Τότε όμως για να διατηρηθεί η προβλεπόμενη κίνηση των φορτίων θα πρέπει αυτά να καταναλώσουν διπλάσια ενέργεια. Επειδή το γεγονός αυτό συμβαίνει για κάθε κεραία ξεχωριστά, σημαίνει ότι η συνολικά παρεχόμενη (και κατόπιν εκπεμπόμενη) στο σύστημα των δύο πηγών ενέργεια, είναι τέσσερις φορές μεγαλύτερη από ότι θα κατανάλωνε η μία πηγή ανεξάρτητα η διπλάσια από αυτήν που θα προσλάμβαναν οι δύο πηγές βρισκόμενες όμως σε σχετικά μεγάλη απόσταση μεταξύ τους.

Κατανομή της έντασης του φωτός στο χώρο, που προκύπτει από την επαλληλία δύο σε φάση και σε συμφωνία εκπεμπόντων σημειακών πηγών ίδιου πλάτους.

Στα προηγούμενα είχαμε υπολογίσει την κατανομή της έντασης του φωτός κατά την επαλληλία δύο συμφώνων μεταξύ τους σημειακών πηγών S_1, S_2 για την περίπτωση μακρινού πεδίου. Δηλ. το πρότυπο συμβολής θεωρούσαμε ότι σχηματίζεται σε απόσταση $L > d^2/\lambda$ και σε περιοχή αρκετά κοντά στο σημείο O' του πετάσματος Π (Σχ. 6.4.1.11α). Εκεί διαπιστώσαμε ότι οι κροσσοί συμβολής είναι σταθερής περιόδου $T = \lambda L/d$ (σχ. 6.4.1.18) δηλ. ευθύγραμμοι και παράλληλοι μεταξύ

τους. Το ερώτημα που τίθεται τώρα σε γενικές γραμμές είναι τι ακριβώς συμβαίνει όσον αφορά την κατανομή της έντασης του φωτός σ' όλο το χώρο μετά το διάφραγμα Δ στο οποίο βρίσκονται οι δύο σημειακές πηγές και κατά προέκταση όταν διαθέτουμε δύο πηγές που εκπέμπουν εντελώς ελεύθερα στο χώρο.



(Σχ. 6.4.1.11)

Με τη βοήθεια της (σχ. 6.4.1.10), για $I_1 = I_2 = I_0$ και $\phi_1 = \phi_2$ βρίσκουμε ότι η ένταση του φωτός σε οποιοδήποτε σημείο P του χώρου που προσδιορίζεται από τις αποστάσεις $S_1P = r_1$, $S_2P = r_2$ δίνεται από τη σχέση:

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\delta/2\right) \qquad (6.4.1.32)$$

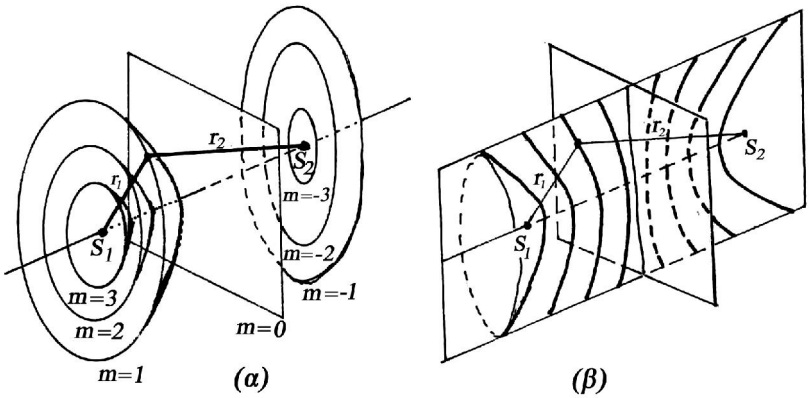
όπου $\delta = k\left(r_2 - r_1\right)$ η διαφορά φάσης των αφικνούμενων στο P διαταραχών. Κατά τα γνωστά (σχ. 6.4.1.12,13) θα έχουμε: $I_{\max}$ όταν $\delta = 2m\pi$ $m = 0, \pm1, \pm2, ...$ και $I_{\min}$ όταν $\delta = \left(2m+1\right)\pi$ $m = 0, \pm1, \pm2, ...$ Επειδή $\delta = k\left(r_2 - r_1\right)$ θα είναι:

$$I_{\max}: \text{ όταν } \quad r_2 - r_1 = m\lambda \quad m = 0, \pm1, \pm2, ... \qquad (6.4.1.33)$$

$$I_{\min}: \text{ όταν } \quad r_2 - r_1 = \left(2m+1\right)\frac{\lambda}{2} \quad m = 0, \pm1, \pm2, ... \qquad (6.4.1.34)$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις και με βάση τα πορίσματα της αναλυτικής γεωμετρίας, οι επιφάνειες $r_2 - r_1 = \text{σταθ.}$ σχηματίζουν στο χώρο ισαπέχοντα ζεύγη υπερβολοειδών από περιστροφή με εστίες τις πηγές S_1, S_2 και αντιπροσωπεύουν τις θέσεις μεγίστων, ελαχίστων και των λοιπών τιμών, του προτύπου συμβολής. Στο (Σχ.

6.4.1.12) γίνονται εμφανείς οι γεωμετρικοί τόποι των θέσεων των μεγίστων συμβολής για $m = 0$ (επίπεδο κάθετο στο μεσοδιάστημα S_1S_2), $\pm 1, \pm 2, \ldots$. Επίσης στο (Σχ. 6.4.1.12β) δείχνεται η τομή αυτών των υπερβολοειδών από ένα επίπεδο που περιλαμβάνει τις δύο πηγές S_1, S_2. Τα ίχνη πάνω σ' αυτό το επίπεδο αντιπροσωπεύουν κροσσούς συμβολής που στην προκειμένη περίπτωση είναι θέσεις μεγίστων. Σε ενδιάμεσες θέσεις θα βρίσκονται οι γεωμ. τόποι των ελαχίστων και κατά προέκταση οι θέσεις με τιμές έντασης μεταξύ των ακραίων. Το πρότυπο συμβολής μακρινού



(Σχ. 6.4.1.12)

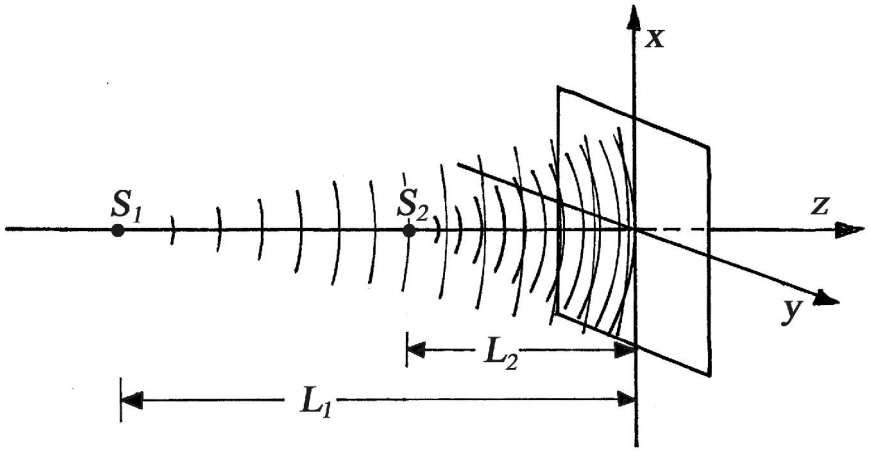
πεδίου κατά τα γνωστά θα πρέπει ν' ανιχνευθεί σε απόσταση $L > d^2/\lambda$ όπου $d = S_1S_2$ και με την προϋπόθεση ότι $d \gg \lambda$. Βρίσκεται πάνω στο επίπεδο Π παράλληλο του διαφράγματος Δ που περιλαμβάνει τις πηγές και είναι κάθετο στον άξονα OO' (Σχ. 6.4.1.15). Ο τελευταίος είναι κάθετος στα προαναφερόμενα επίπεδα. Επειδή $d \gg \lambda$, ο αριθμός των ζευγών των υπερβολοειδών μεταξύ των S_1, S_2 θα είναι πάρα πολύ μεγάλος. Αυτό σημαίνει ότι η τομή τους από το επίπεδο Π σε απόσταση L θα περιλαμβάνει επίσης πολύ μεγάλο αριθμό κροσσών των οποίων η καμπυλότητα σε περιοχή σχετικά κοντά στο O' θα είναι πολύ μεγάλη δηλ. θα φαίνονται ευθύγραμμοι όπως έχουν υπολογιστεί από τη (σχ. 6.4.1.17), ενώ στην πραγματικότητα είναι υπερβολές. Πρέπει ν' αναφέρουμε ότι το πρότυπο συμβολής από δύο σύμφωνες μεταξύ τους σημειακές πηγές πάνω σ' ένα επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση S_1S_2, είναι κυκλικής συμμετρίας όπως αποδεικνύεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3

Να υπολογιστεί το πρότυπο συμβολής που προέρχεται από δύο σύμφωνες σημειακές πηγές S_1, S_2 που βρίσκονται πάνω σε ευθεία που είναι κάθετη σε επίπεδο και απέχουν από αυτό αποστάσεις L_1, L_2 όπου $L_1 > L_2$.

● Έχουμε αποδείξει (βλ. Κεφ. 1: Κύματα (§ 1.8 Παράδειγμα)) ότι η κατανομή του πλάτους πάνω σ' ένα επίπεδο που προέρχεται από μια σημειακή πηγή που εκπέμπει κατά τα γνωστά ένα αποκλίνον σφαιρικό μέτ. κύματος και απέχει από αυτό απόσταση L δίνεται από τη σχέση: $E=\left(\frac{A}{L}e^{-ikL}\right)e^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}}$. Και επειδή ο παράγοντας $q=\frac{A}{L}e^{-ikL}$ είναι ένας σταθερός παράγοντας πλάτους και φάσης θα έχουμε: $E=qe^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L}}$, $x,y\ll L$.

Επομένως η επαλληλία των δύο σφαιρικών κυμάτων πάνω στο επίπεδο x,y (Σχ. 6.4.1.13) θα δίνεται από τη σχέση:



(Σχ. 6.4.1.13)

$E_{o\lambda.}=E_1+E_2=ae^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_1}}+be^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_2}}$. Και εφόσον οι διαταραχές είναι σύμφωνες μεταξύ τους, η κατανομή της έντασης I πάνω στο επίπεδο x,y θα δίνεται από τη σχέση (με παράληψη του όρου $\left(\varepsilon_0 c/2\right)$):

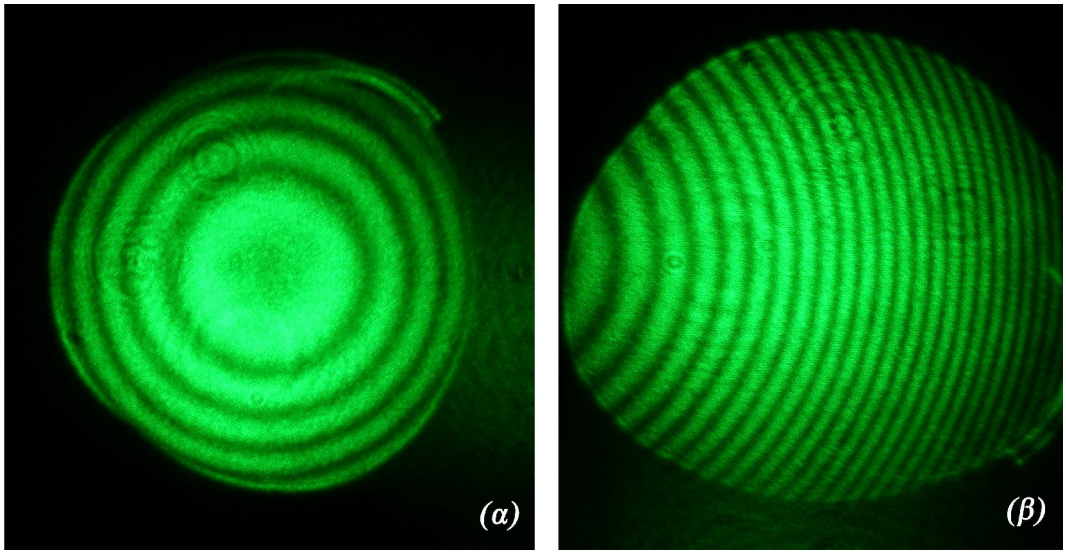
$$I=\left|\left(E_1+E_2\right)\right|^2=\left(E_1+E_2\right)\left(E_1^*+E_2^*\right)=\left|E_1\right|^2+\left|E_2\right|^2+E_1E_2^*+E_1^*E_2\Rightarrow$$

$$I=a^2+b^2+abe^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_1}}e^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_2}}+abe^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_1}}e^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda L_2}}\Rightarrow$$

$$I=A+Be^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda}\left(\frac{1}{L_1}-\frac{1}{L_2}\right)}+Be^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda}\left(\frac{1}{L_1}-\frac{1}{L_2}\right)}=A+Be^{\frac{-i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda\left(\frac{L_1L_2}{L_1-L_2}\right)}}+Be^{\frac{i\pi\left(x^2+y^2\right)}{\lambda\left(\frac{L_1L_2}{L_1-L_2}\right)}}\Rightarrow$$

$$I = A + Be^{i\theta} + B^{-i\theta} = A + 2B\cos\theta \;\Rightarrow\; I = A + 2B\cos\left[\pi\left(x^2 + y^2\right)\Big/\lambda\left(\frac{L_1 L_2}{L_1 - L_2}\right)\right]$$

Και από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε ότι η κατανομή της έντασης του προτύπου συμβολής πάνω στο επίπεδο x, y είναι κυκλικής συμμετρίας. Ένα τέτοιο πρότυπο βλέπουμε στην (Εικ. 6.4.1.14) και ονομάζεται Gabor zone plate. Οι δύο

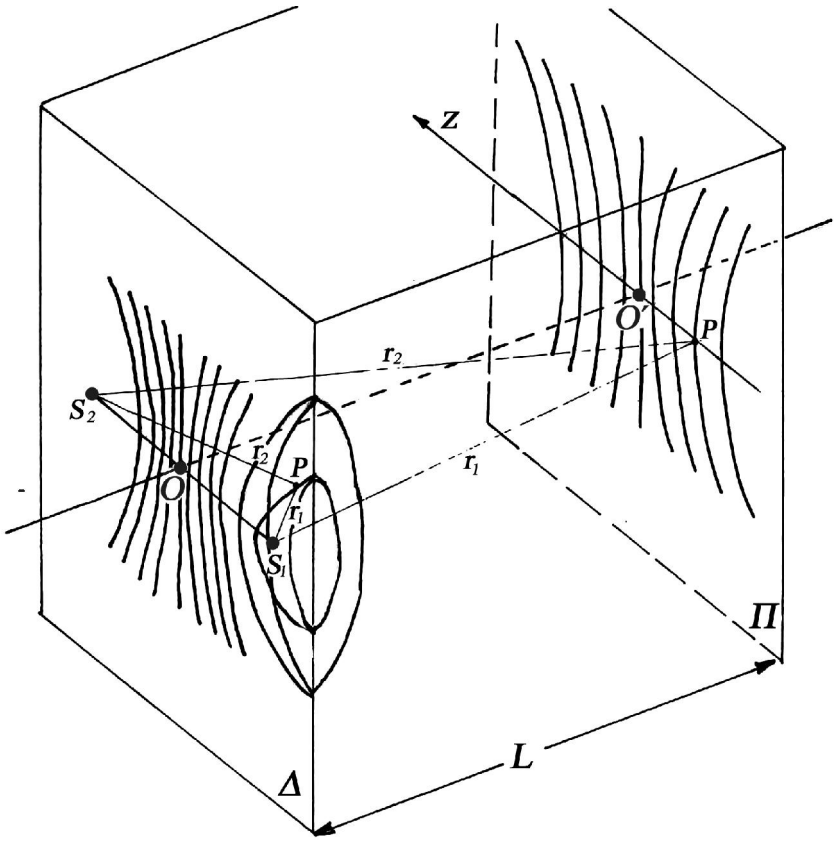


(Εικ. 6.4.1.14)

σύμφωνες σημειακές πηγές φωτός δημιουργήθηκαν με τη βοήθεια συμβολομέτρου Michelson, που τα κάτοπτρά του είχαν διαφορετική απόσταση από το διαχωριστή δέσμης (βλ. § 6.6). Στην είσοδό του υπήρχε αποκλίνων (αρνητικός) φακός, ο οποίος φωτιζόταν με δέσμη διοδικού Laser μ.κ. 532nm. Λόγω του μικρού πεδίου εξόδου του συμβολόμετρου, στις (Εικ. 6.4.1.14α,β) βλέπουμε διαδοχικά το κέντρο και την περιφέρεια του προτύπου συμβολής. Παρεμπιπτόντως αναφέρουμε ότι ο Denis Gabor ήταν ο εφευρέτης της ολογραφίας (βλ. Εισαγωγή κεφαλαίου και Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός (ΘΕΜΑ 2)).

Έστω τέλος ότι αντί των πηγών S_1, S_2 (Σχ. 6.4.1.15), χρησιμοποιούμε δύο άλλες S_1', S_2' οι οποίες απέχουν πάλι απόσταση d μεταξύ τους αλλά βρίσκονται μετατοπισμένες κατά το ίδιο διάστημα πάνω στο επίπεδο Δ σε διευθύνσεις κάθετες προς την ευθεία S_1S_2. Τότε το πρότυπο συμβολής μακρινού πεδίου στο επίπεδο Π θα είναι πανομοιότυπο αν και παράλληλα μετατοπισμένο (σε διεύθυνση κάθετη με

αυτή των δύο πηγών S_1, S_2) ως προς το προηγούμενο. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι τα δύο ζεύγη πηγών εκπέμπουν ταυτόχρονα από τις θέσεις τους. Έστω επίσης ότι οι πηγές του κάθε ζεύγους εκπέμπουν σύμφωνα αλλά μεταξύ τους τα δύο ζεύγη ασύμφωνα. Άρα το τελικό αποτέλεσμα στο πέτασμα Π θα είναι η ασύμφωνη επαλληλία των δύο προτύπων συμβολής. Επειδή όμως δεν αλλάζει ούτε η περίοδος T, ούτε ο προσανατολισμός των κροσσών συμβολής για τα δύο πρότυπα (απλά είναι παράλληλα μετατοπισμένα προς τη διεύθυνση των κροσσών), θα προστεθούν μόνο



(Σχ. 6.4.1.15)

οι εντάσεις τους. Με άλλα λόγια θα έχουμε αύξηση της λαμπρότητας των κροσσών συμβολής. Το γεγονός ενισχύεται τα μέγιστα με τη χρησιμοποίηση αντί ζευγών συμφώνων σημειακών πηγών, γραμμικών πηγών όπως φαίνεται ενδεικτικά στο (Σχ. 6.4.1.11β).

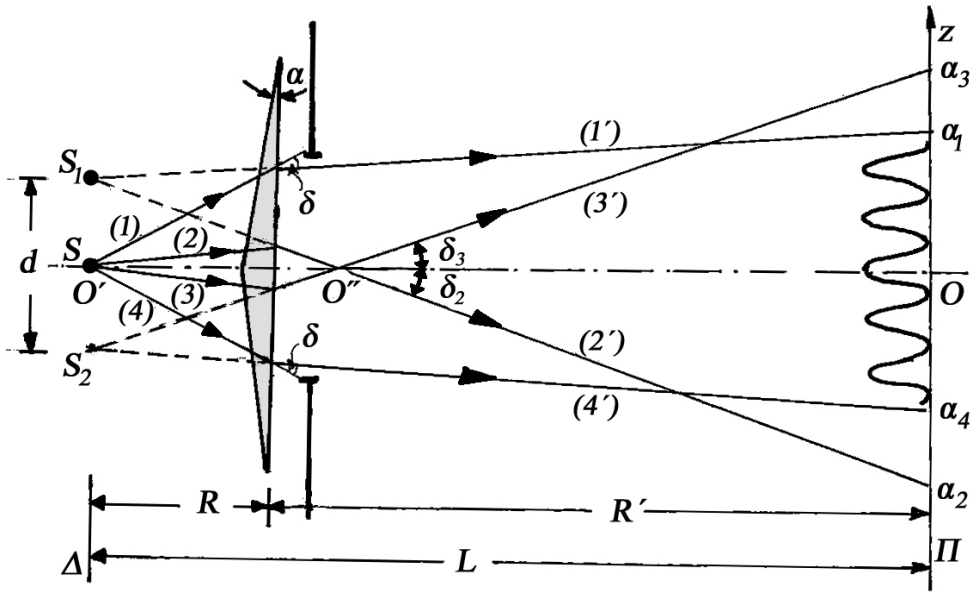
Το ζεύγος αυτό δημιουργείται από μια εκτεταμένη γραμμική πηγή ή μια φωτιζόμενη σχισμή μεγάλου μήκους. Τότε το μέτωπο κύματος που εκπέμπεται από την προαναφερόμενη είναι κυλινδρικό. Κατόπιν σε μια ορισμένη απόσταση τοποθετούνται δύο παράλληλες μεταξύ τους σχισμές μικρού πλάτους και σε απόσταση d μεταξύ τους. Είναι ευλογοφανές ότι κάθε σημείο της αρχικής πηγής δημιουργεί δύο χωρικά σύμφωνες μεταξύ τους σημειακές πηγές, οι οποίες έχουν τη δυνατότητα

να συμβάλλουν μεταξύ τους. Ένα δεύτερο σημείο της αρχικής πηγής (σε διαφορετική θέση) οδηγεί ακριβώς στα ίδια αποτελέσματα. Μεταξύ τους όμως τα δύο σημεία είναι ασύμφωνα επειδή ανήκουν σε διαφορετικά τμήματα της ίδιας πηγής. Άρα και τα δύο προκύπτοντα αντίστοιχα ζεύγη πηγών συμβάλλουν στο πέτασμα Π με ανεξάρτητο τρόπο, ενισχύοντας απλά την ένταση του προτύπου συμβολής δηλ. την λαμπρότητά του.

Τέλος το πεδίο που δημιουργείται στη διεύθυνση που ενώνει τις δύο πηγές S_1, S_2 είναι πεδίο στασίμων Η/Μ κυμάτων (βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά κύματα (§ 2.8)).

6.4.2 *Το δίπρισμα του Fresnel*

Αποτελείται από ένα πολύ λεπτό, διπλό, ορθό πρίσμα όπως σε τομή φαίνεται στο (Σχ. 6.4.2.1), με διαθλαστική γωνία $\alpha = 1^0 - 2^0$ και δ.δ. n. Μια σημειακή πηγή S τοποθετείται σε συμμετρική θέση και σε απόσταση R από την κορυφή του. Ο κώνος φωτός που οριοθετείται από τις ακτίνες (1) και (4) διαθλάται με τον εξής



(Σχ. 6.4.2.1)

τρόπο. Θεωρούμε τον αρχικό κώνο διαιρούμενο σε δύο συμμετρικούς με τις ακτίνες (2) και (3) σχεδόν παράλληλες με τον άξονα OO'. Τότε η ακτίνα (1) διαθλάται κατά την (1΄). Η (2) κατά την (2΄), σχηματίζοντας γωνία εκτροπής (προσπίπτουσα σε σχέση με τη διαθλώμενη) ίση με δ_2 επειδή θεωρήσαμε κατά προσέγγιση ότι η ακτίνα (2) και ο άξονας OO' σχεδόν ταυτίζονται. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο η α-

κτίνα (4) διαθλάται κατά την (4΄) και η (3) κατά την (3΄) σχηματίζοντας με τον άξονα OO' γωνία εκτροπής δ_3. Για λόγους συμμετρίας θα είναι $\delta_2 = \delta_3 = \delta$ και επειδή τα πρίσματα είναι λεπτά θεωρούμε ότι οι γωνίες εκτροπής δ βρίσκονται στην συνθήκη ελαχίστης εκτροπής (δηλ. $\delta = \delta_m$). Τότε (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική ΠΑΡ/ΜΑ 1 (σχ. 1.1.2)) θα ισχύει η σχέση:

$$n = \sin\left(\frac{a + \delta_m}{2}\right) / (\sin a / 2) \qquad (6.4.2.1)$$

και επειδή οι γωνίες a και δ_m είναι πολύ μικρές ισχύει: $\sin x \simeq x$.Οπότε:

$$\delta_m = a(n-1) \qquad (6.4.2.2)$$

Βλέπουμε χαρακτηριστικά ότι το αρχικό μέτωπο κύματος που λόγω του διαφράγματος Δ' (που βρίσκεται πίσω από το δίπρισμα) περιορίζεται από τις ακτίνες (1) και (4), χωρίζεται σε δύο (τα μεταξύ των ακτίνων (1΄), (2΄) και (3΄), (4΄)) που φαίνονται σαν να προέρχονται από τις φανταστικές πηγές S_1, S_2.

Προκειμένου να καθορίσουμε την περίοδο T των κροσσών συμβολής στην περιοχή $a_1 a_4$ του πετάσματος Π όπου έχουμε την επαλληλία των δύο δευτερευόντων μετώπων, θα πρέπει να υπολογίσουμε την απόσταση d μεταξύ των φανταστικών πηγών S_1, S_2. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του ισοσκελούς τριγώνου $S_1 O'' S_2$, του οποίου η γωνία $\widehat{S_1 O'' S_2} = 2\delta$. Και επειδή η 2δ είναι πολύ μικρή (ανεξάρτητα αν υπερτονίζεται στο σχήμα) θα ισχύει:

$$d = R2\delta \qquad (6.4.2.3)$$

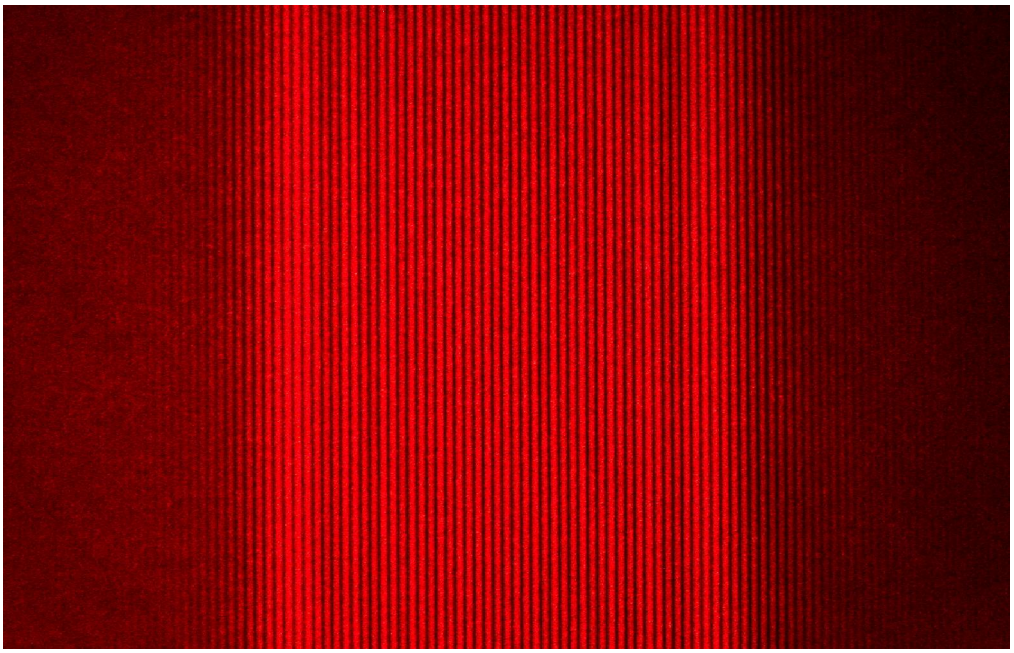
Αν R' είναι η απόσταση διπρίσματος – πετάσματος Π, τότε $L = R + R'$. Γνωρίζουμε επίσης από το πείραμα του Young (σχ. 6.4.1.18) ότι η περίοδος των κροσσών συμβολής δίνεται από τη σχέση:

$$T = \lambda L / d \qquad (6.4.2.4)$$

Τελικά με τη βοήθεια όλων των προηγούμενων σχέσεων βρίσκουμε:

$$T = \frac{(R + R')\,\lambda}{2R\alpha(n\text{-}1)} \qquad (6.4.2.5)$$

Στην (Εικ. 6.4.2.2), βλέπουμε το πρότυπο συμβολής που προέρχεται από ένα δίπρισμα Fresnel. Οι κροσσοί συμβολής που κατά τα γνωστά είναι σταθερής περιόδου, διαμορφώνονται από ένα σύστημα κροσσών με αυξανόμενη περίοδο προς τα άκρα του προτύπου. Πρόκειται για αποτέλεσμα του φαινομένου της περίθλασης Fresnel (κοντινού πεδίου) που προέρχεται από τα όρια του διαφράγματος Δ'. (βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός (§ 7.8.9)).



(Εικ. 6.4.2.2)

Παράδειγμα

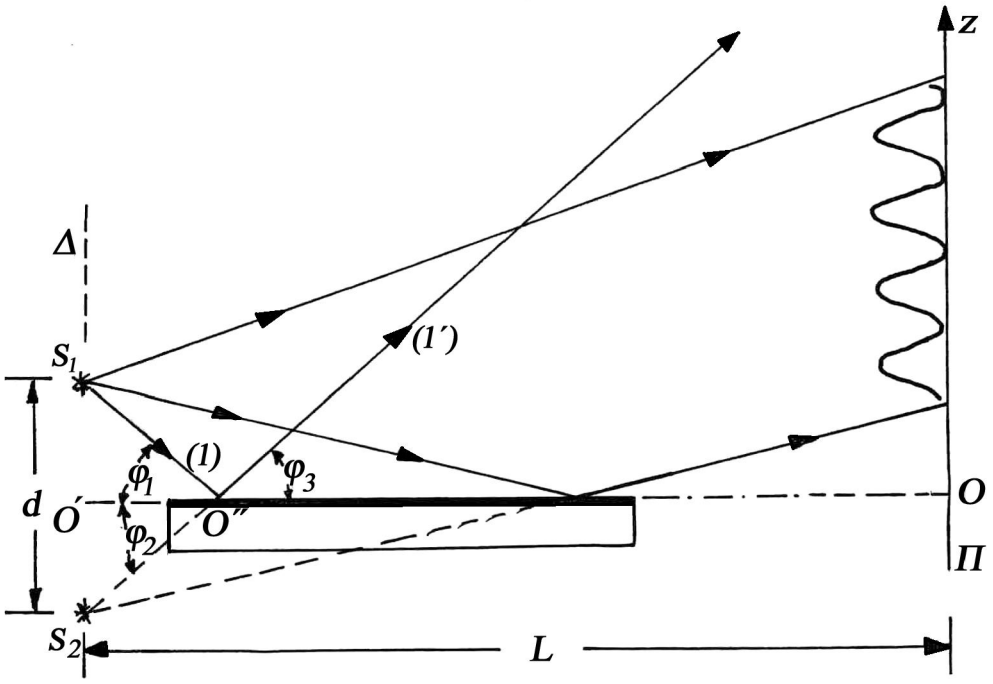
Έστω η απόσταση πηγής διπρίσματος είναι $R = 10\text{cm}$ και διπρίσματος – πετάσματος $R' = 2\text{m}$. Η διαθλαστική του γωνία $a = 1^0 (0.01745\text{rad})$, το μ.κ. $\lambda = 632.8\text{nm}$ και ο δ.δ. $n = 1.5$. Τότε με βάση τη (σχ. 6.4.2.5) βρίσκουμε ότι η περίοδος των κροσσών από πέτασμα Π θα είναι $T \simeq 0.76\text{mm}$. Η απόσταση μεταξύ των δύο φανταστικών πηγών με τη βοήθεια των (σχ. 6.4.2.3,2) βρίσκεται ότι είναι $d \simeq 17.45\text{mm}$.

Μια πρακτική μέθοδος προσδιορισμού τις απόστασης d μεταξύ των φανταστικών πηγών S_1S_2 είναι μέσω ενός συγκλίνοντος φακού. Ο φακός τοποθετείται μετά το διάφραγμα Δ' και απεικονίζει τις πηγές S_1S_2 στο πέτασμα Π. Αν μετρήσουμε τις αποστάσεις S_o και S_i (πηγών φακού – φακού πετάσματος), τότε ο λόγος $S_i/S_o = m$ είναι η πλευρική μεγέθυνση του συστήματος. Άρα από τη σχέση

$S_1'S_2' / S_1S_2 = m$ (εφόσον η απόσταση $S_1'S_2'$ μπορεί να μετρηθεί στο επίπεδο απεικόνισης), υπολογίζεται η $d = S_1S_2$.

6.4.3 *Το κάτοπτρο Lloyd*

Όπως φαίνεται στο (Σχ. 6.4.3.1), η διάταξη αποτελείται από ένα επίπεδο κάτοπτρο, το οποίο φωτίζεται από μια σημειακή πηγή S_1. Η τελευταία απέχει μια ορισμένη απόσταση από το ένα άκρο του και είναι κατ' ελάχιστο υπερυψωμένη από το επίπεδο της επιφάνειάς του. Το σφαιρικό μέτωπο κύματος το προερχόμενο από την



(Σχ. 6.4.3.1)

πηγή S_1, κατά ένα τμήμα του διαδίδεται ελεύθερα και μέρος του ανακλάται στην επιφάνεια του κατόπτρου, συνεχίζοντας κατόπιν την πορεία του. Το ανακλώμενο μέτωπο κύματος φαίνεται σαν να προέρχεται από την φανταστική πηγή S_2, η οποία βρίσκεται σε συμμετρική θέση με την S_1 ως προς την επιφάνεια του κατόπτρου.

Η κάθετη από την S_1 προς την προέκταση της επιφάνειας του κατόπτρου και η προέκτασή της ανακλώμενης (1΄) της ακτίνας (l) τέμνονται στο σημείο S_2. Οι γωνίες ϕ_1 και ϕ_3 είναι ίσες λόγω της ανάκλασης. Οι ϕ_2 και ϕ_3 είναι επίσης ίσες ως κατά κορυφήν. Επομένως $\phi_1 = \phi_2$ και το τρίγωνο $S_1O''S_2$ είναι ισοσκελές. Άρα η S_2 είναι συμμετρική της S_1 ως προς την προέκταση της επιφάνειας του κατόπτρου.

Εάν σε μια απόσταση L από τις πηγές τοποθετήσουμε πέτασμα Π, τότε εφόσον τα δύο μέτωπα κύματος συσχετισθούν, έχουμε τη δυνατότητα να πάρουμε φαινόμενα συμβολής. Όπως μπορούμε να δούμε στο (Σχ. 6.4.3.1), η περιοχή συσχετισμού είναι μακράν του σημείου O που ορίζεται από την τομή της προέκτασης της επιφάνειας του κατόπτρου με το πέτασμα στη διεύθυνση της μεσοκαθέτου S_1S_2. Το γεγονός αυτό συμβαίνει επειδή στο σχήμα υπερτονίζεται η απόσταση της S_1 από το O'. Στην πράξη όμως, όπως ήδη αναφέραμε, η S_1 απέχει από το O' λίγα μόνο χιλιοστά με συνέπεια να έχουμε συσχετισμό διαταραχών ακόμα και στο σημείο O του πετάσματος Π.

Βλέπουμε τελικά ότι η όλη διάταξη προσομοιάζει με αυτήν την κλασσικής του Young, με μόνη τη διαφορά ότι τα δύο μέτωπα κύματος συμβάλουν με διαφορά φάσης 180^0. Πράγματι λόγω της σχεδόν εφαπτομενικής πρόσπτωσης του ενός τμήματος του μετώπου κύματος στο κάτοπτρο, κατά την ανάκλασή του υφίσταται μετατόπιση φάσης $\simeq 180^0$ στη διαχωριστική του επιφάνεια με τον αέρα, η οποία προβλέπεται από την Η/Μ θεωρία. Επομένως εάν $r_2 - r_1$ είναι η διαφορά δρόμου μεταξύ δύο διαταραχών από τις πηγές S_1 και S_2 σ' ένα σημείο P του πετάσματος Π τότε η διαφορά φάσης θα δίνεται από τη σχέση:

$$\delta = k\left(r_2 - r_1\right) \pm \pi \qquad (6.4.3.1)$$

Εφόσον οι εντάσεις στο P από τις S_1, S_2 είναι περίπου ίσες$\left(I_1 = I_2 = I_0\right)$ και $\phi_1 = \phi_2$, τότε από τη (σχ. 6.4.1.10) και την (σχ. 6.4.3.1) θα έχουμε:

$$I = 4I_o \cos^2\frac{\delta}{2} = 4I_o \cos^2\left[\frac{k\left(r_2 - r_1\right) \pm \pi}{2}\right] = 4I_o \cos^2\left[\frac{k\left(r_2 - r_1\right)}{2} \pm \frac{\pi}{2}\right] = 4I_o \sin^2\frac{\pi dz}{\lambda L} \qquad (6.4.3.2)$$

όπου L η απόσταση πηγών πετάσματος, d η απόσταση μεταξύ των πηγών , z η τεταγμένη του σημείου P και λ το μ.κ. της πηγής. Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι στη θέση O θα έχουμε μηδενική τιμή έντασης δηλ. σκοτεινό κροσσό, σε αντιδιαστολή με το κλασσικό πείραμα του Young.

Παράδειγμα

Έστω ότι η πηγή S_1 βρίσκεται σε απόσταση 2.5mm πάνω από την προέκταση της επιφάνειας του κατόπτρου και το πέτασμα Π σε απόσταση $L = 1.5\text{m}$, προκειμένου να πληρούται η συνθήκη για τη συμβολή μακρινού πεδίου. Εάν το μ.κ.

του φωτός που εκπέμπει η πηγή S_1 είναι $\lambda = 632.8\text{nm}$ να προσδιοριστεί η θέση του πρώτου μεγίστου συμβολής, μετρούμενου από τη θέση O του πετάσματος Π .

- Από τη (σχ. 6.4.1.18) υπολογίζουμε την περίοδο $T = \lambda L/d$ των κροσσών συμβολής δηλ. την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων (ή ελαχίστων). Μετά την αντικατάσταση βρίσκουμε: $T = 0.19\text{mm}$. Επειδή η θέση $z = 0$ αντιστοιχεί σε μηδενικό ελάχιστο του προτύπου συμβολής, τότε το πρώτο μέγιστο θα βρίσκεται σε απόσταση $z = T/2 = 0.095\text{mm}$ από τη θέση O του πετάσματος Π .

Συμβολή του φωτός μεταξύ μετώπων κύματος τυχαίας μορφολογίας

Η μέχρις εδώ μελέτη μας αφορούσε την επαλληλία δύο συμφώνων σφαιρικών μετώπων κύματος, με αποτέλεσμα τη συμβολή τους σε ένα επίπεδο ή σε μια περιοχή του χώρου. Φαινόμενα όμως συμβολής μπορούν ν' αναδειχθούν και κατά την επαλληλία μετώπων κύματος που η μορφολογία τους είναι τυχαία. Δηλ. πολύ διαφορετική από αυτές που συναντήσαμε μέχρι τώρα και που οι ισοφασικές τους επιφάνειες ήταν σφαιρικές, επίπεδες και κυλινδρικές. Αρκεί βέβαια να είναι σύμφωνα μεταξύ τους. Στο (Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός (ΘΕΜΑ 2)), ασχολούμαστε στοιχειωδώς με την ***Ολογραφία (Holography)***. Πρόκειται για τη μέθοδο κατά την οποία είναι δυνατόν σε ένα μέσο (π.χ. ένα ειδικό φωτογραφικό φιλμ) να καταγράψουμε τις πληροφορίες που αφορούν ένα μετ. κύματος τυχαίας μορφολογίας.

Το τελευταίο επιτυγχάνεται με την καταγραφή ενός συμβολογραφήματος, που προκύπτει από τη σύμφωνη επαλληλία του προαναφερόμενου πολύπλοκου μετ. κύματος με ένα π.χ. επίπεδο μετ. κύματος του ονομαζόμενου μετ. κύματος αναφοράς. Αποδεικνύεται στην προκειμένη περίπτωση ότι στο συμβολογράφημα που δημιουργείται στο υλικό καταγραφής (κατά την επίδραση του φωτός με την ύλη), βρίσκονται καταχωρημένες οι πληροφορίες που αφορούν το πλάτος και τη φάση (από σημείο σε σημείο) του μετ. κύματος. Σε μια επόμενη φάση και εφόσον στο συμβολογράφημα προσπέσει μόνο το επίπεδο μετ. κύματος της αναφοράς, θα έχουμε σαν αποτέλεσμα ν' αναπαραχθεί (διαδιδόμενο στο χώρο) το αρχικό μετ. κύματος τυχαίας μορφολογίας. Η ολογραφία τελικά συνιστά μια οπτική μέθοδο αναπαραγωγής ενός μετ. κύματος. Δηλ. συνιστά μια μέθοδο απεικόνισης σε τρεις διαστάσεις.

6.5 *Συμβολή και συμβολόμετρα δύο δεσμών μέσω διαίρεσης πλάτους*

Στην (§ 6.3.2) έχει περιγραφεί ο τρόπος με τον οποίο ένα αρχικό μέτωπο κύματος μπορεί να διαιρεθεί κατά πλάτος σε δύο ή και περισσότερα μέτωπα, προκειμένου σε επόμενη φάση να μπορέσουν να συσχετιστούν δίνοντας φαινόμενα συμβολής. Απαραίτητα προϋπόθεση βέβαια, είναι ότι μεταξύ τους πρέπει να υφίσταται ένας ορισμένος βαθμός συμφωνίας. Βασικό στοιχείο του μηχανισμού διαίρεσης, αποτέλεσε ένα διαφανές πλακίδιο από διηλεκτρικό (ορισμένης ανακλαστικότητας και διαπερατότητας), για το οποίο υποθέσαμε ότι δεν απορροφά το φως. Επίσης αναφερθήκαμε σε ειδικά οπτικά εξαρτήματα ένα από τα οποία είναι ο διαχωριστής δέσμης που αποτελείται από επίπεδη πλάκα διηλεκτρικού επικαλυμμένη με ημιδιαφανές υμένιο μετάλλου. Το πλεονέκτημα του τελευταίου, είναι η ελεγχόμενη ανακλαστικότητα και διαπερατότητα του πλακιδίου.

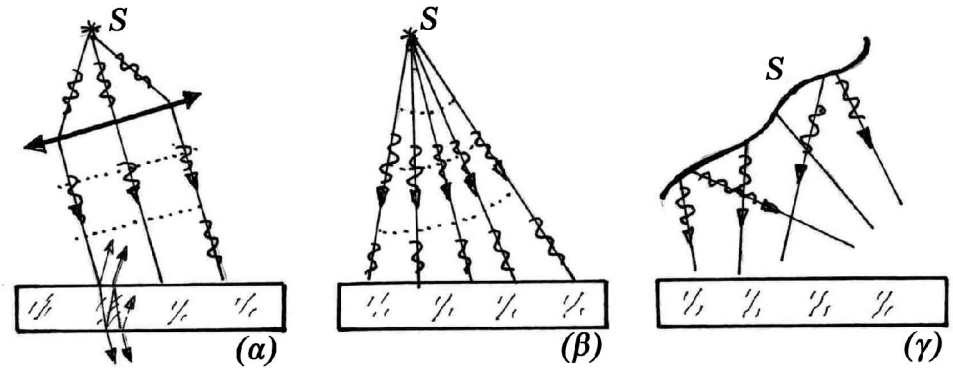
Στην κατηγορία των οπτικών οργάνων που χρησιμοποιούν τη διαίρεση πλάτους, ανήκουν τα πλέον γνωστά για το μεγάλο εύρος των εφαρμογών τους συμβολόμετρα του Michelson και των Fabry-Perot καθώς και οι παραλλαγές τους, των οποίων η μελέτη θα γίνει στα επόμενα.

6.5.1 *Συμβολή δύο δεσμών φωτός από διαίρεση πλάτους μέσω επίπεδης πλάκας διηλεκτρικού. Κροσσοί ίσης κλίσης. Κροσσοί Haidinger*

Θεωρούμε πλακίδιο από διαφανές διηλεκτρικό πάχους d με επίπεδες και παράλληλες έδρες δ.δ. n_f (Σχ. 6.5.1.3), το οποίο διαχωρίζει δύο οπτικά μέσα με δ.δ. n_1 και n_2 αντίστοιχα. Μια πλέον απλοποιημένη εκδοχή της διάταξης στην οποία συνήθως θ' αναφερόμαστε, είναι η περίπτωση για την οποία $n_1 = n_2 = n$ και συνήθως ο δ.δ. n είναι αυτός του αέρα όπου $n \simeq 1.0$. Με τη βοήθεια της μεθόδου διαίρεσης πλάτους, θ' αναδείξουμε δύο σύμφωνα μεταξύ τους μέτωπα κύματος, τα οποία ερχόμενα σ' επαλληλία, θα οδηγήσουν σε φαινόμενα συμβολής. Στα (Σχ. 6.5.1.1), φαίνεται ο τρόπος φωτισμού ενός πλακιδίου από επίπεδο, σφαιρικό και ένα εν γένει πολύπλοκο μέτωπο κύματος το οποίο προέρχεται από μια εκτεταμένη φωτίζουσα πηγή. Η τελευταία συνήθως είναι επίπεδη.

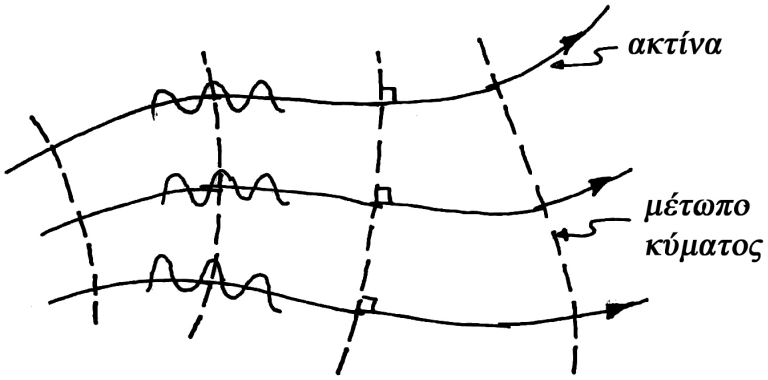
Θα είναι πιο εύκολο να μελετήσουμε το φαινόμενο της συμβολής και να παράγουμε τις κατάλληλες σχέσεις με τις οποίες περιγράφεται ποσοτικά, αν αντί των διαδιδόμενων μετώπων κύματος χρησιμοποιήσουμε τις συνοδεύουσες αυτά ακτίνες. Είναι γνωστό βέβαια για την περίπτωση διάδοσης του φωτός σε ομογενή και ισότροπα μέσα (Σχ. 6.5.1.2), ότι οι ακτίνες που αντιπροσωπεύουν στην πραγματικότητα τις πορείες διάδοσης της ενέργειας είναι σ' οποιοδήποτε σημείο κάθετες προς τα αντίστοιχα μέτωπα κύματος. Έτσι το γεγονός της πρόσπτωσης στο πλακίδιο επιπέδου μετώπου κύματος (Σχ. 6.5.1.1α) θα το αντιπροσωπεύσουμε από μία

ακτίνα η οποία ανακλάται στην πάνω του επιφάνεια και συγχρόνως διαθλάται στο εσωτερικό του πλακιδίου. Κατόπιν ανακλώμενη και διαθλώμενη από την κάτω του επιφάνεια κ.ο.κ. θα μας δώσει τη γνωστή πολλαπλότητα των παραλλήλων ακτίνων. Στην πραγματικότητα αυτή η πολλαπλότητα αναφέρεται στην έξοδο από τις δύο



(Σχ. 6.5.1.1)

επιφάνειες του πλακιδίου των αντίστοιχων μετώπων κύματος τα οποία όπως προαναφέραμε είναι κάθετα στις ακτίνες. Ένας άλλος τρόπος φωτισμού του πλακιδίου (Σχ. 6.5.1.1β) είναι μέσω μιας σημειακής πηγής η οποία εκπέμπει σφαιρικό μέτωπο κύματος. Το πλεονέκτημα σ' αυτή την περίπτωση, είναι ότι έχουμε ακτίνες που

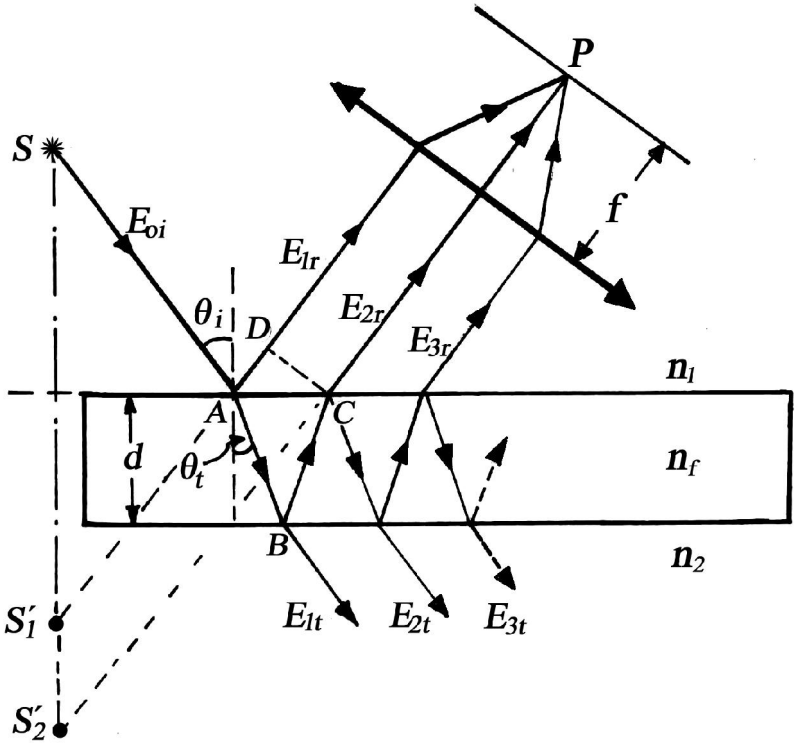


(Σχ. 6.5.1.2)

προσεγγίζουν στο πλακίδιο με διαφορετικές γωνίες πρόσπτωσης. Τέλος ένας συνήθης τρόπος φωτισμού είναι μέσω μιας εκτεταμένης πηγής (Σχ. 6.5.1.1γ), από την οποία η ακτίνες διαδίδονται προς κάθε κατεύθυνση. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συγκεκριμένη πηγή αποτελείται από ένα πολύ μεγάλο αριθμό σημειακών πηγών, οι οποίες όμως όπως ήδη έχουμε αποδείξει είναι μεταξύ τους ασύμφωνες. Άρα δύο παράλληλες ακτίνες προερχόμενες από διαφορετικά σημεία της πηγής, θα μας δώσουν η κάθε μία την ίδια ένταση (κατόπιν συμβολής από τις παραγόμενες ανακλώ-

μενες ή διαθλώμενες), οι οποίες τελικά προστίθενται. Το πλεονέκτημα του φωτισμού, μ' εκτεταμένη πηγή – για όπου μπορεί να εφαρμοστεί – είναι ότι προκαλεί σημαντική αύξηση της λαμπρότητας ενός προτύπου συμβολής σε αντιδιαστολή με το αν το πλακίδιο φωτιζόταν από μια μόνο σημειακή πηγή.

Θεωρούμε τώρα (Σχ. 6.5.1.3), ότι ένα πλακίδιο πάχους d και δ.δ. n_f φωτίζεται από μία σημειακή πηγή S που εκπέμπει φως ορισμένου βαθμού χρονικής συμφωνίας (π.χ. ψευδομονοχρωματικό φως προερχόμενο από μια φασματική λυχνία Na). Έστω μια διαταραχή πλάτους E_{0i} διαδίδεται κατά τη διεύθυνση της ακτίνας που προσεγγίζει το πλακίδιο με γωνία πρόσπτωσης θ_i. Τμήμα της διαταραχής



(Σχ. 6.5.1.3)

πλάτους E_{1r} ανακλάται από την πάνω επιφάνεια στο σημείο A, με γωνία ίση με τη γωνία πρόσπτωσης και τμήμα της διαθλάται στο εσωτερικό του πλακιδίου με γωνία θ_t. Κατά την άφιξή της στο σημείο B της κάτω επιφάνειας, με τον ίδιο τρόπο μερικώς ανακλάται (εσωτερικά) και μερικώς διαθλάται με πλάτος E_{1t} εκτός του πλακιδίου. Το ίδιο συμβαίνει και από το σημείο C όταν από την πάνω επιφάνεια αναδύεται η διαταραχή πλάτους E_{2r} με διεύθυνση παράλληλη αυτής της πρώτης ανακλώμενης. Το γεγονός της πολλαπλής ανάκλασης στο εσωτερικό του πλακιδίου, οδηγεί κατά τα γνωστά σε ένα μεγάλο αριθμό παράλληλα αναδυόμενων από την πάνω κα-

θώς και από την κάτω επιφάνεια διαταραχών. Οι τιμές των $E_{1r}, E_{2r}, E_{3r}, ...$ όπως και των $E_{1t}, E_{2t}, E_{3t}, ...$ (όπως ήδη έχουμε αποδείξει) καθορίζονται με τη βοήθεια των συντελεστών ανακλαστικότητας και διαπερατότητας με βάση τη θεωρία του Fresnel.

Στα επόμενα, μεγαλύτερη έμφαση θα δώσουμε στην επαλληλία διαταραχών αναδυόμενων από την πάνω επιφάνεια του πλακιδίου (ανακλώμενες) αν και η διαδικασία είναι πανομοιότυπη για τις αναδυόμενες από την κάτω επιφάνεια (διαθλώμενες). Αριθμητικά αν το πλάτος της προσπίπτουσας διαταραχής είναι το E_{0i}, τότε οι τιμές των E_{1r}, E_{2r}, E_{3r} θα είναι κατά σειρά: $E_{1r} = 0.2E_{0i}$, $E_{2r} = 0.192E_{0i}$ και $E_{3r} = 0.008E_{0i}$. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να λάβουμε σαν σημαντικές μόνο τις δύο πρώτες ανακλώμενες, επειδή τα πλάτη των διαταραχών από την τρίτη και μετά είναι αμελητέα και δεν συνεισφέρουν σημαντικά στη διαμόρφωση του τελικού προτύπου συμβολής. Οι διαταραχές με πλάτη E_{1r}, E_{2r} είναι παράλληλες με μια όμως διαφορά φάσης μεταξύ τους λόγω του ότι διανύουν διαφορετικούς οπτικούς δρόμους. Η διαφορά του οπτικού δρόμου L με τη βοήθεια του (Σχ. 6.5.1.3) θα δίνεται από τη σχέση:

$$L = n_f\left[(AB)+(BC)\right] - n_1(AD) \qquad (6.5.1.1)$$

και επειδή: $(AB) = (BC) = d/\cos\theta_t$

$$L = \left(2n_f d/\cos\theta_t\right) - n_1(AD) \qquad (6.5.1.2)$$

Επειδή όμως: $(AD) = (AC)\sin\theta_i$, $n_1\sin\theta_i = n_f\sin\theta_t$ και $(AC) = 2d\tan\theta_t$, η (σχ. 6.5.1.1) γίνεται: $L = \left(2n_f d\right)\left(1-\sin^2\theta_t\right)/\cos\theta_t$ και τελικά:

$$L = 2n_f d\cos\theta_t \qquad (6.5.1.3)$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο διαταραχών θα δίνεται από τη γνωστή σχέση $\delta = k_0 L$ όπου $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ και λ_0 το μ.κ. της ακτινοβολίας στον ελεύθερο χώρο. Όμως εάν $n_1 < n_f$ και $\theta_i < 30^0$ η πρώτη διαταραχή ανακλάται από οπτικά πυκνότερο μέσο σε οπτικά αραιότερο με συνέπεια να λάβει σε σχέση με τη δεύτερη διαταραχή μια πρόσθετη φάση ίση με 180^0. Τελικά $\delta = k_0 L \pm \pi$ και η (σχ. 6.5.1.3) γίνεται:

$$\delta = \frac{4\pi n_f}{\lambda_o} d\cos\theta_t \pm \pi \qquad (6.5.1.4)$$

Το πρόσημο στη διαφορά φάσης των 180^0 δεν έχει ουσιαστική σημασία. Στα επόμενα θα επιλέξουμε το $(-)$.

Οι δύο διαταραχές εφόσον είναι σύμφωνες μεταξύ τους (δηλ. Η διαφορά των οπτικών τους δρόμων είναι μέσα στα όρια του μήκους συμφωνίας που χαρακτηρίζει την ακτινοβολία της φωτίζουσας πηγής), έχουν τη δυνατότητα να συμβάλλουν. Για να συμβεί όμως αυτό επειδή είναι παράλληλες, πρέπει να τις οδηγήσουμε σε κοινό σημείο. Το τελευταίο επιτυγχάνεται είτε με την παρεμβολή του ματιού μας στην πορεία τους (δηλ. μέσω του κρυσταλλώδους φακού του ματιού έχουμε σύγκλιση σ' ένα σημείο του αμφιβληστροειδή) ή μέσω ενός θετικού φακού (Σχ. 6.5.1.3) ο οποίος τις συγκεντρώνει σ' ένα σημείο P του εστιακού του επιπέδου. Σε κάθε περίπτωση οι δύο διαταραχές είναι σαν να προέρχονται από δύο φανταστικές πηγές S_1', S_2' της S που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς τις δύο επιφάνειες του πλακιδίου.

Θα έχουμε μέγιστο συμβολής (δηλ. μέγιστη λαμπρότητα στο σημείο P) όταν ισχύει: $\delta = 2m\pi$ ή με βάση τη (σχ. 6.5.1.4) όταν:

$$\max: \quad d\cos\theta_t = (2m+1)\lambda_f/4 \quad \text{ή} \quad 4n_f d\cos\theta_t = (2m+1)\lambda_0 \qquad (6.5.1.5)$$

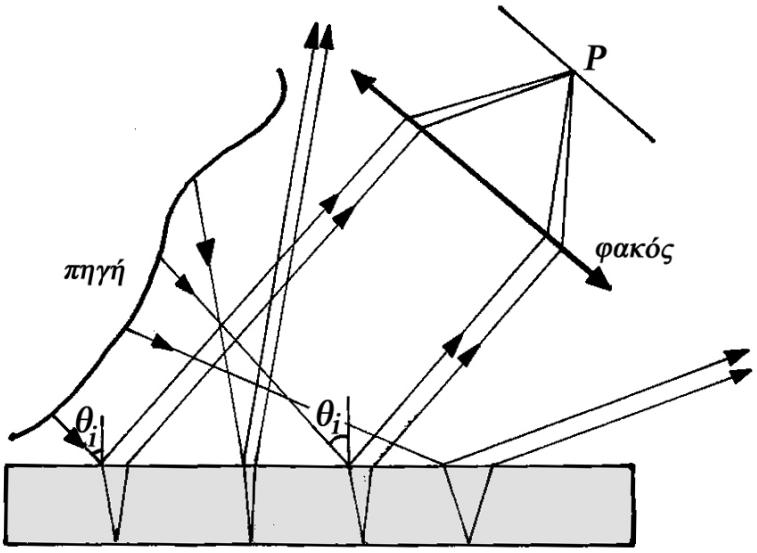
όπου $n_f = \lambda_0/\lambda_f$. Η ίδια σχέση θα αντιστοιχεί σε ελάχιστα συμβολής για τις δύο διαθλώμενες με πλάτη E_{1t}, E_{2t} από την κάτω επιφάνεια του πλακιδίου (εδώ δεν υφίσταται η διαφορά φάσης των 180^0). Ελάχιστα συμβολής (για τις ανακλώμενες με πλάτη E_{1r}, E_{2r}) θα έχουμε όταν $\delta = (2m-1)\pi$ δηλ. με βάση τη (σχ. 6.5.1.4) όταν:

$$\min: \quad d\cos\theta_t = 2m\lambda_f/4 \quad \text{ή} \quad 4n_f d\cos\theta_t = 2m\lambda_0 \qquad (6.5.1.6)$$

Η ίδια σχέση θ' αντιστοιχεί σε μέγιστα συμβολής για τις δύο διαθλώμενες με πλάτη E_{1t}, E_{2t} από την κάτω επιφάνεια του πλακιδίου. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δείξουμε για περιπτώσεις όπου δεν ισχύει η σχέση: $n_1 = n_2 = n < n_f$ την οποία μελετούμε εδώ, λόγω της εμφάνισης πρόσθετων φάσεων κατά τις ανακλάσεις από οπτικά αραιότερα σε οπτικά πυκνότερα υλικά.

Υπάρχουν δύο βασικοί περιορισμοί όσον αφορά την ευκρινή παρατήρηση των κροσσών συμβολής σε διατάξεις διαίρεσης πλάτους. Ο ένας όπως ήδη αναφέραμε, αφορά το βαθμό χρονικής συμφωνίας μεταξύ των δύο διαταραχών που έρχονται σε επαλληλία και ο οποίος εξαρτάται από το εύρος της φασματικής κατανομής της φωτίζουσας πηγής. Στην προκειμένη περίπτωση η διαφορά οπτικού δρόμου L δύο διαταραχών, δεν θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το μήκος των κυματοσυρ-

μών που εκπέμπει η πηγή. Άλλος παράγοντας είναι η κλίση θ_i των προσπιπτουσών διαταραχών οι οποίες θα μπορούσαν παρά το ότι είναι σύμφωνες μεταξύ τους, να μην συλλέγονται από τον φακό (Σχ. 6.5.1.4) λόγω του μεγέθους του με συνέπεια να μην συνεισφέρουν στη δημιουργία του προτύπου συμβολής. Βλέπουμε ότι διαταραχές που προέρχονται από διαφορετικά σημεία της πηγής και προσπίπτουν στο πλακίδιο με την ίδια κλίση, συμβάλλουν στο ίδιο σημείο επειδή τ' αντίστοιχα ζεύγη έχουν την ίδια ακριβώς διαφορά φάσης. Βέβαια όπως ήδη αναφέραμε, το κάθε ζεύγος διαταραχών στο P συμβάλλει ανεξάρτητα ενισχύοντας απλώς την λαμπρότητα του προτύπου συμβολής. Ο λόγος είναι ότι τα αντίστοιχα ζεύγη προέρχονται από διαφορετικά τμήματα της εκτεταμένης πηγής τα οποία μεταξύ τους είναι ασύμφωνα.

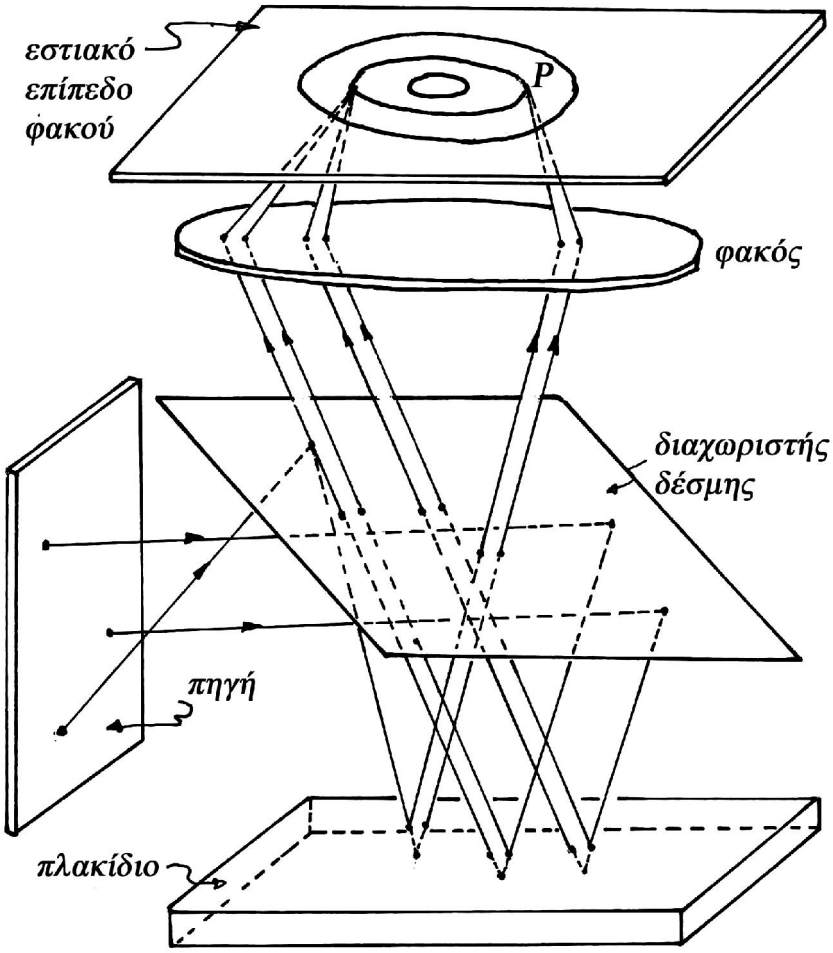


(Σχ. 6.5.1.4)

Κροσσοί τέτοιου είδους ονομάζονται ***κροσσοί ίσης κλίσης (fringes of equal inclination)*** επειδή για $d = \text{σταθ.}$ η θέση του σχηματισμού τους εξαρτάται από την γωνία θ_t και κατά προέκταση από την θ_i. Διαταραχές με ίδια διεύθυνση διάδοσης (κλίση) αλλά που βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα θα συμβάλλουν σε σημεία που απέχουν ίδια απόσταση από το κέντρο του προτύπου συμβολής. Δηλ. τελικά οι κροσσοί συμβολής θα είναι κυκλικής συμμετρίας (Σχ. 6.5.1.5). Μια ιδέα του πως σχηματίζονται οι δακτύλιοι, παίρνουμε αν περιστρέψουμε τις διευθύνσεις δύο συμβαλλουσών διαταραχών περί τον κατακόρυφο ως προς το πλακίδιο άξονα. Τότε το σημείο P θα διαγράψει τροχιά κύκλου.

Στη συμβολομετρία υπάρχει γενικά μεγάλο ενδιαφέρον όσον αφορά το είδος και το χώρο στον οποίο τελικά σχηματίζονται οι κροσσοί συμβολής. Το ***είδος*** ανα-

φέρεται στους ***πραγματικούς (real)*** και τους ***φανταστικούς (virtual)*** κροσσούς. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν αυτοί που σχηματίζονται από συγκλίνουσες διαταραχές. Στη δεύτερη, αυτοί που προκύπτουν από αποκλίνουσες ή παράλληλες. Για να δούμε τους τελευταίους θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε οπωσδήποτε ένα συγκλίνον σύστημα (π.χ. το μάτι μας ή ένα φακό). Δηλ. στην προκειμένη περίπτωση ο κρυσταλλώδης φακός του ματιού μας προσαρμοζόμενος, δημιουργεί στον αμφιβληστροειδή ένα συζυγή πραγματικό χώρο στον οποίο σχηματίζονται οι κροσσοί δηλ. συγκλίνει τις αρχικά αποκλίνουσες διαταραχές που έχουν δυνατότητα να συμβάλλουν. Στην περίπτωση των κροσσών που μελετούμε όπως και γι' αυτούς του



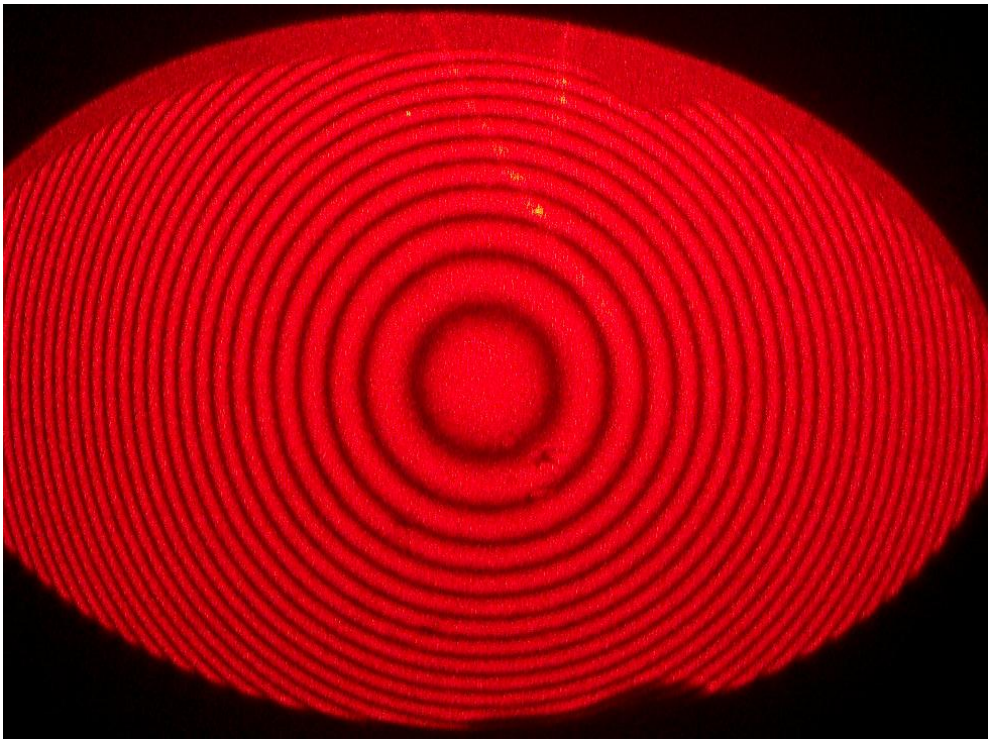
(Σχ. 6.5.1.5)

Haidinger (βλέπε στα επόμενα), οι προς συσχετισμό διαταραχές διαδίδονται σε παράλληλες διευθύνσεις. Άρα οι κροσσοί συμβολής θεωρητικά σχηματίζονται στο άπειρο και σε εντελώς συγκεκριμένο επίπεδο. Είναι αυτοί που ονομάζονται ***εντοπισμένοι (localized)***. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και στην περίπτωση που χρησιμο-

ποιούμε συγκλίνοντα φακό. Τότε η ακριβής θέση εντοπισμού τους θα είναι το πίσω του εστιακό επίπεδο και όχι οποιαδήποτε άλλη περιοχή. Μια γενικότερη θεώρηση όσον αφορά τον εντοπισμό των κροσσών, σχετίζεται με παράγοντες όπως η θέση, οι διαστάσεις και η επιπεδότητα της φωτίζουσας πηγής.

Κροσσοί Haidinger

Όπως ήδη αναφέραμε, το μέγεθος του χρησιμοποιούμενου φακού για τη σύγκλιση των προς συσχετισμό διαταραχών, καθορίζει και τον αριθμό των κυκλικών κροσσών του προτύπου συμβολής που τελικά θα γίνει εμφανές. Συγκεντροποίηση όμως των κροσσών μπορεί να γίνει περί το κέντρο του προτύπου και όταν οι γωνίες πρόσπτωσης θ_i γίνουν πολύ μικρές. Κροσσοί τέτοιου είδους που παρατηρούνται με σχεδόν κάθετη πρόσπτωση των διαταραχών ονομάζονται ***κροσσοί Haidinger***. Η διάταξη του (Σχ. 6.5.1.5) πληροί τους όρους της σχεδόν κάθετης πρόσπτωσης στο πλακίδιο μέσω του διαχωριστή δέσμης που έχει ως προς αυτό κλίση περίπου 45^0. Οι διαταραχές που προέρχονται από την εκτεταμένη πηγή ανακλώνται μερικώς από την κάτω του επιφάνεια και προσπίπτουν στο πλακίδιο. Κατόπιν τα δημιουργούμενα προς συσχετισμό ζεύγη διαταραχών διαπερνούν το διαχωριστή και με τη βοήθεια του φακού συμβάλλουν στα διάφορα σημεία του εστιακού του επιπέδου. Ένα τέτοιου είδους πρότυπο συμβολής φαίνεται στην (Εικ. 6.5.1.6).



(Σχ. 6.5.1.6)

Λεπτομερής προσδιορισμός της δομής των κροσσών Haidinger , δίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

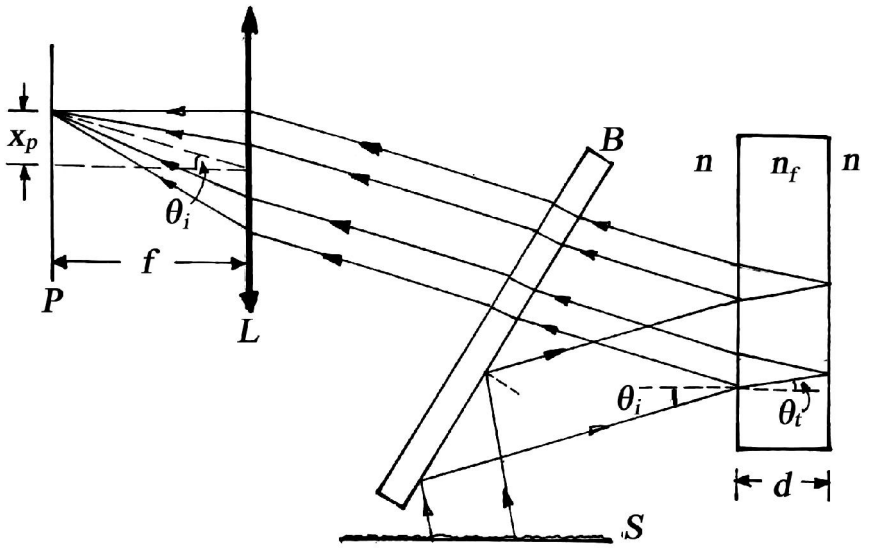
Παράδειγμα 1

Ν' αποδειχθεί ότι κατά τη διαδικασία σχηματισμού κροσσών Haidinger και για την περίπτωση που το πάχος d του πλακιδίου ελαττώνεται: α) Η ακτίνα x_p του κροσσού τάξης p μετρούμενου από το κέντρο του προτύπου αυξάνεται. β) Οι κροσσοί μεταξύ τους αραιώνουν και αντίστροφα.

- Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο διαταραχών που ανακλώνται η μία κατ' ευθεία και η άλλη μέσω διάθλασης στις δύο επιφάνειες του διηλεκτρικού πλακιδίου με παράλληλες έδρες πάχους d και δ.δ. n_f δίνεται από τη (σχ. 6.5.1.4):

$$\delta = \frac{4\pi n_f d\cos\theta_t}{\lambda_o} - \pi \qquad (6.5.1.7)$$

όπου θ_t η γωνία διάθλασης και λ_o το μ.κ. του φωτός στον ελεύθερο χώρο. Από το (Σχ. 6.5.1.7) βλέπουμε ότι θ_i είναι η γωνία πρόσπτωσης της αρχικής διαταραχής



(Σχ. 6.5.1.7)

που προέρχεται από μια εκτεταμένη πηγή η οποία εκπέμπει ψευδομονοχρωματικό φως μ.κ. λ_o. f είναι η εστιακή απόσταση του φακού L που συγκεντρώνει τις δια-

ταραχές ίσης κλίσης και x η ακτίνα ενός κροσσού του κυκλικής συμμετρίας του προτύπου συμβολής.

Κατά τα γνωστά, θα έχουμε σχηματισμό ελαχίστων συμβολής (δηλ. σκοτεινούς κροσσούς) για $\delta = (2m-1)\pi$. Επομένως από τη (σχ. 6.5.1.7) βρίσκουμε ότι η συνθήκη σχηματισμού ελαχίστων δίνεται από τη σχέση:

$$2n_f d\cos\theta_t = m\lambda_0 \quad m = 0,1,2... \tag{6.5.1.8}$$

από την οποία λύνοντας ως προς m βρίσκουμε:

$$m = \frac{2n_f d\cos\theta_t}{\lambda_o} \tag{6.5.1.9}$$

Από την τελευταία, μπορούμε να βρούμε τη μέγιστη αριθμητική τιμή του σκοτεινού κροσσού τάξης $m(m_{\max})$ που αντιστοιχεί στο κέντρο του προτύπου. Αυτό συμβαίνει για $\theta_t \to 0$ ή $\cos\theta_t \to 1$ οπότε από τη (σχ. 6.5.1.9) θα έχουμε:

$$m_{\max} = 2n_f d/\lambda_0 \tag{6.5.1.10}$$

Όταν οι θ_t είναι μικρές (σχεδόν κάθετη πρόσπτωση του φωτός στο πλακίδιο) θα ισχύει: $\cos\theta_t \simeq 1-\theta_t^2/2$ οπότε η (σχ.6.5.1.9) γίνεται: $m = \frac{2n_f d}{\lambda_o}\left(1-\frac{\theta_t^2}{2}\right)$ και λόγω της (σχ. 6.5.1.10):

$$m = m_{\max}\left(1-\theta_t^2/2\right) \tag{6.5.1.11}$$

Επίσης όταν θ_i, θ_t είναι μικρές από το νόμο του Snell έχουμε :

$$n\theta_i = n_f\theta_t \tag{6.5.1.12}$$

οπότε η (σχ. 6.5.1.11) γίνεται:

$$m = m_{\max}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n_f}\right)^2\theta_i^2\right] \tag{6.5.1.13}$$

Επίσης με τη βοήθεια του (Σχ. 6.5.1.7) βλέπουμε ότι:

$$\theta_i = x/f \tag{6.5.1.14}$$

όπου x η ακτίνα του m τάξης σκοτεινού κροσσού. Τότε από τις (σχ. 6.5.1.13,14) βρίσκουμε:

$$m(x) = m_{\max}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{n \cdot x}{n_f \cdot f}\right)^2\right] \tag{6.5.1.15}$$

Αν η (σχ. 6.5.1.15) λυθεί ως προς x τότε βρίσκουμε:

$$x = \frac{n_f \cdot f}{n}\left[\frac{2(m_{\max} - m)}{m_{\max}}\right]^{1/2} \tag{6.5.1.16}$$

Ο αριθμός των ορατών σκοτεινών κροσσών (δηλ. οι μετρούμενοι από το κέντρο του προτύπου συμβολής) μεταξύ αυτού με $x = 0$ και αυτού με $x = x_p$ θα είναι:

$$p = m_{\max} - m \tag{6.5.1.17}$$

Αν το πάχος d είναι γνωστό, τότε ο $m_{\max}$ μπορεί να υπολογιστεί από τη (σχ. 6.5.1.10). Τότε η ακτίνα x_p του μετρούμενου από το κέντρο του προτύπου p ορατού σκοτεινού κροσσού, με τη βοήθεια των (σχ. 6.5.1.16,17) θα δίνεται από τη σχέση:

$$x_p = \frac{f}{n}\left[\frac{p n_f \lambda_o}{d}\right]^{1/2} \tag{6.5.1.18}$$

Από την τελευταία βλέπουμε ότι όταν το d ελαττώνεται η ακτίνα x_p του p σκοτεινού κροσσού (από το κέντρο) αυξάνεται. Για $d \to 0$, $x_p \to \infty$ και το εστιακό επίπεδο του φακού L καταλαμβάνεται (ομοιόμορφα) από τον σκοτεινό κροσσό $m = 0$ (συμβάλλουσες διαταραχές με διαφορά φάσης π).

Με διαφόριση της (σχ. 6.5.1.15) βρίσκουμε ότι:

$$\Delta m(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n_f \cdot f}\right)^2 \Delta x^2 \tag{6.5.1.19}$$

δηλ. $\Delta m \sim \Delta x^2$ οπότε συμπεραίνουμε ότι ο βαθμός αύξησης στην τάξη m αντιστοιχεί κατ' απόλυτο τιμή σε αύξηση του x^2. Για δύο διαδοχικούς κροσσούς m και

$m+1,\ \Delta m=1$ οπότε: $m(x_m)-m(x_{m+1})=1$ και με τη βοήθεια της (σχ. 6.5.1.15) βρίσκουμε τελικά:

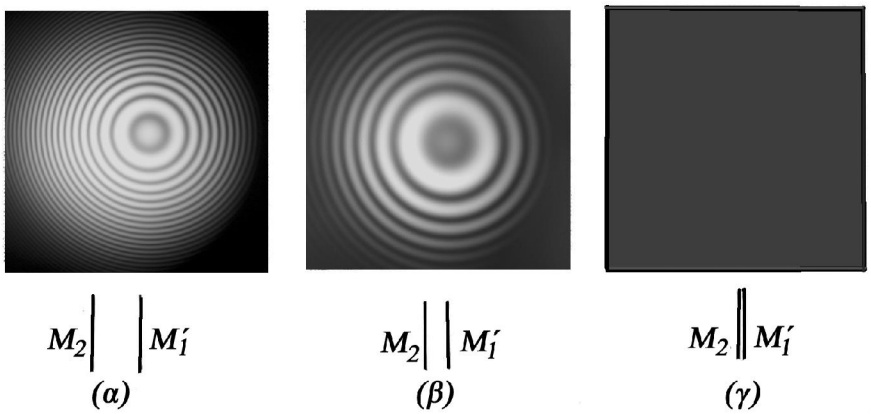
$$\frac{1}{2}\frac{n^2}{n_f^2 f^2}\cdot m_{\max}\left(x_{m+1}^2-x_m^2\right)=1 \quad (x_{m+1}>x_m) \tag{6.5.1.20}$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το πρώτο μέλος της (σχ. 6.5.1.20) με το π και θέτοντας $\Delta\left(\pi x^2\right)=\left(\pi x_{m+1}^2\right)-\left(\pi x_m^2\right)$ – που αντιπροσωπεύει το εμβαδόν μεταξύ των δύο σκοτεινών κροσσών – βρίσκουμε:

$$\Delta\left(\pi x^2\right)=\frac{2\pi n_f^2 f^2}{n^2}\cdot\frac{1}{m_{\max}}=\pi\left(\frac{f}{n}\right)^2\frac{n_f\lambda_o}{d} \tag{6.5.1.21}$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι όσο το πάχος d του πλακιδίου ελαττώνεται, τόσο το εμβαδόν $\Delta\left(\pi x^2\right)$ μεταξύ δύο διαδοχικών κροσσών αυξάνεται δηλ. οι κροσσοί μεταξύ τους αραιώνουν και το αντίστροφο.

Πειραματικά την προαναφερόμενη διαδικασία μπορούμε να την παρακολουθήσουμε πολύ εύκολα με τη βοήθεια της μετακίνησης του κινητού κατόπτρου M_2 στο συμβολόμετρο του Michelson, το οποίο ουσιαστικά αυξομειώνει το πάχος d του 'πλακιδίου' από αέρα που σχηματίζεται μεταξύ των κατόπτρων M_2 και M_1' με την προϋπόθεση βέβαια ότι τα τελευταία είναι παράλληλα. Στις (Εικ. 6.5.1.8)



(Εικ. 6.5.1.8)

μπορούμε να παρακολουθήσουμε διαδοχικά την διεύρυνση του προτύπου συμβολής (αύξηση του εμβαδού μεταξύ δύο διαδοχικών κροσσών καθορισμένης τάξης) καθώς η απόσταση $d=M_2M_1'$ ανάμεσα στο κάτοπτρο M_2 και του ειδώλου M_1' του κατόπτρου M_1 ως προς το διαχωριστή ελαττώνεται. Όταν $d=M_2M_1'=0$ δηλ. έχου-

με ταύτιση των M_2, M_1' τότε το πεδίο όρασης του συμβολομέτρου καλύπτεται από ένα και μόνο σκοτεινό κροσσό (Εικ. 6.5.1.8γ) λόγω της γνωστής διαφοράς φάσης των 180^0 μεταξύ των δύο συμβαλλουσών διαταραχών.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το μικρότερο πάχος που μπορεί να έχει ένα διαφανές υμένιο δείκτη διάθλασης $n_f = 1.51$, έτσι ώστε όταν φωτίζεται κάθετα με παράλληλη δέσμη φωτός μ.κ. $\lambda_0 = 546\text{nm}$ να προκύπτει στο ανακλώμενο ελάχιστο συμβολής.

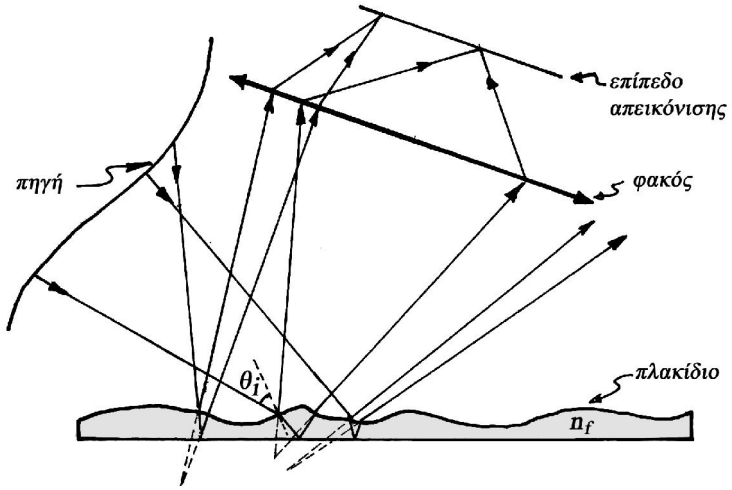
- Η συνθήκη ελαχίστων για τις ανακλώμενες διαταραχές από την πάνω και την κάτω επιφάνεια του υμενίου με παράλληλες έδρες δίνεται από τη γνωστή σχέση: $\dfrac{4\pi d n_f \cos\theta_t}{\lambda_o} - \pi = (2m-1)\,\pi \quad m = 0,1,2,....$

Για κάθετο φωτισμό και για το μικρότερο d που αντιστοιχεί στο $m = 1$ θα έχουμε τελικά τη σχέση $2dn_f = \lambda_0$, οπότε: $d = \lambda_0 / 2n_f$. Από την τελευταία για $\lambda_0 = 546\text{nm}$ και για $n_f = 1.51$ βρίσκουμε: $d = 0.18\mu\text{m}$. Αν σ' ένα τέτοιο υμένιο προσπέσει η προαναφερόμενη ακτινοβολία, τότε το ανακλώμενο ποσοστό της θα είναι μηδενικό. Κατά την πρόσπτωση λευκού φωτός από το ανακλώμενο ποσοστό του θα λείπει η περιοχή του φάσματος γύρω από το μ.κ. $\lambda_0 = 546\text{nm}$.

6.5.2 *Συμβολή από πλακίδια μεταβλητού πάχους. Κροσσοί Fizeau*

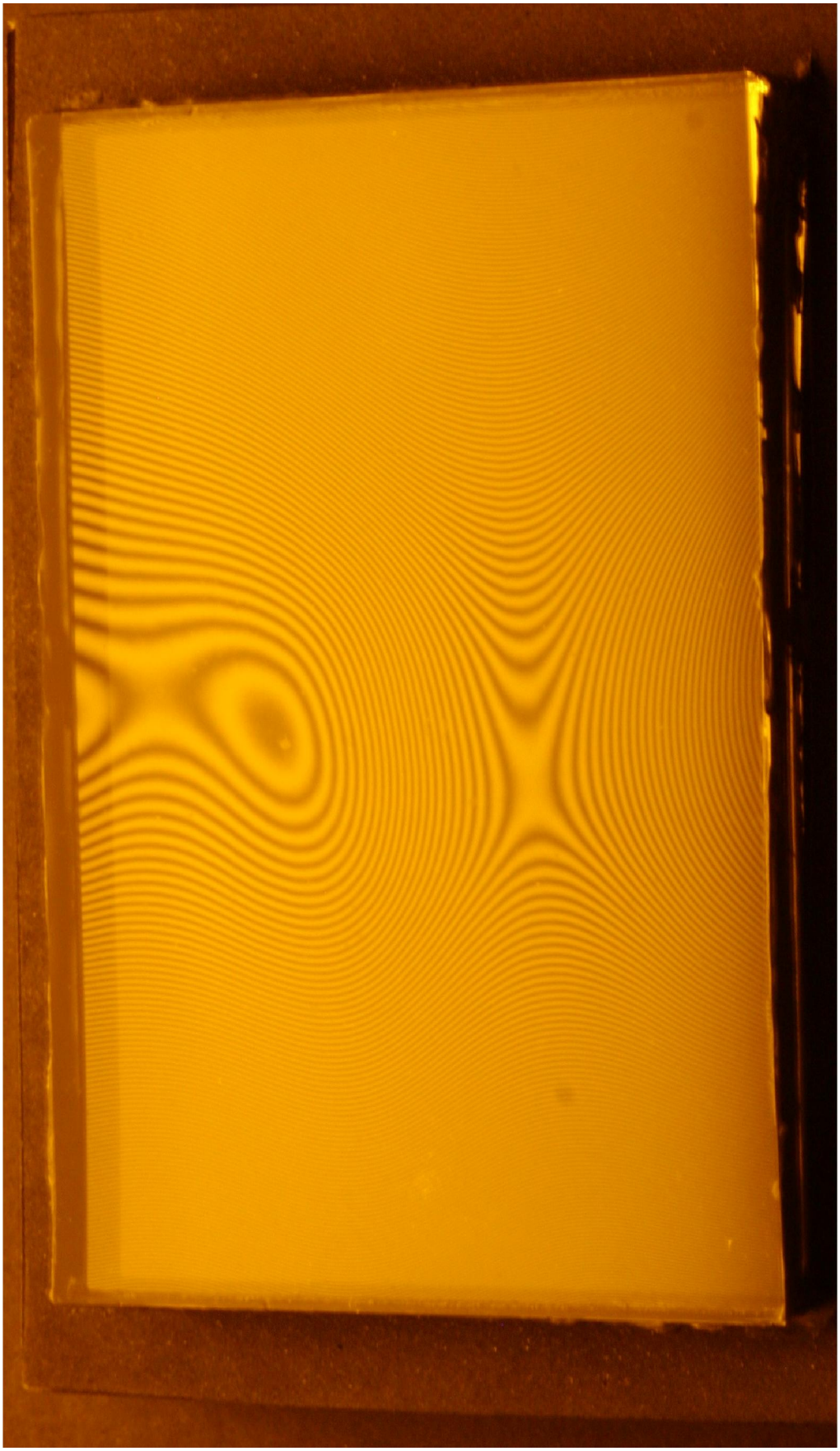
Ας υποθέσουμε ότι με μια εκτεταμένη πηγή που εκπέμπει ψευδομονοχρωματικό φως, φωτίζουμε ένα ομογενές και ανισοπαχές πλακίδιο δ.δ. n_f (Σχ. 6.5.2.1). Βασικό χαρακτηριστικό για τη διάταξη αυτή είναι το εξής: Η διαφορά των οπτικών δρόμων και κατά προέκταση οι διαφορές φάσεων των προκυπτουσών διαταραχών, κατά τις ανακλάσεις από την πάνω και κάτω επιφάνεια του πλακιδίου, δεν οφείλονται μόνο στις γωνίες πρόσπτωσης θ_i των τελευταίων, αλλά και στον παράγοντα dn_f λόγω της από σημείο σε σημείο μεταβολής του πάχους του πλακιδίου. Αν επίσης θεωρήσουμε ότι ένα τέτοιο πλακίδιο φωτίζεται με σχεδόν κάθετο τρόπο (γεγονός που αποτελεί το σύνολο σχεδόν των περιπτώσεων που εξετάζουμε), τότε $\theta_t \simeq 0$ και $\cos\theta_t \simeq 1$. Οπότε ο μόνος παράγοντας διαμόρφωσης της διαφοράς φάσης μεταξύ των συμβαλλουσών διαταραχών θα είναι το πάχος d δεδομένου όπως υποθέσαμε ο δ.δ. n_f είναι σταθερός. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, οι νόμοι

σχηματισμού των κροσσών στο επίπεδο απεικόνισης του φακού (ή χωρίς αυτόν, στον αμφιβληστροειδή του ματιού μας), θα καθορίζονται από το πάχος d. Για το λόγο αυτό ονομάζονται ***κροσσοί ίσου πάχους (fringes of equal thickness)***. Επομένως κάθε κροσσός θ' αποτελεί το γεωμετρικό τόπο των σημείων του πλακιδίου για τα οποία ο οπτικός δρόμος (ή για $n_f = \text{σταθ.}$) το πάχος τους στις θέσεις εκείνες είναι σταθερό.



(Σχ. 6.5.2.1)

Είναι πολύ βασικό να κατανοήσουμε ότι στις περιπτώσεις αυτές, οι διευθύνσεις των συμβαλλουσών διαταραχών δεν είναι παράλληλες αλλά αποκλίνουν ελαφρά (ή σε άλλες περιπτώσεις συγκλίνουν) λόγω της σφηνοειδούς μορφής από σημείο σε σημείο του πλακιδίου. Συνέπεια αυτού του γεγονότος θα είναι ότι το πρότυπο συμβολής δεν θα σχηματίζεται στο πίσω εστιακό επίπεδο του φακού αλλά σ' ένα επίπεδο απεικόνισης (όπως π.χ. στον αμφιβληστροειδή του ματιού). Δεδομένου όμως ότι το μάτι βλέπει κατά την προέκταση των συμβαλλουσών διαταραχών, 'φαίνεται' ότι οι κροσσοί καταλαμβάνουν το χώρο στη θέση που βρίσκεται το πλακίδιο. Στην (Εικ. 6.5.2.2) βλέπουμε το πρότυπο συμβολής που δημιουργείται από ένα υμένιο μεταβλητού πάχους. Το υμένιο αυτό είναι ο αέρας που εγκλωβίστηκε ανάμεσα σε δύο επίπεδες πλάκες από γυαλί. Μακροσκοπικά οι πλάκες φαίνονται επίπεδες. Σε μικροσκοπικό όμως επίπεδο πάντα υπάρχουν διακυμάνσεις του πάχους τους, με συνέπεια οι απόσταση μεταξύ των πλακών από περιοχή σε περιοχή να είναι διαφορετική. Αν τα πάχη αυτά από αέρα είναι μέσα στα όρια του μήκους συμφωνίας της φωτίζουσας πηγής, τότε θα έχουμε την εμφάνιση προτύπου συμβολής όπως αυτό της (Εικ. 6.5.2.2). Στην προκειμένη περίπτωση το σύστημα των πλακών φωτίστηκε με μια εκτεταμένη πηγή (μεγάλων διαστάσεων επίπεδο θαμπόγυαλο) που φωτιζόταν με τη σειρά του από την πίσω του πλευρά με μια λυχνία Νατρίου.



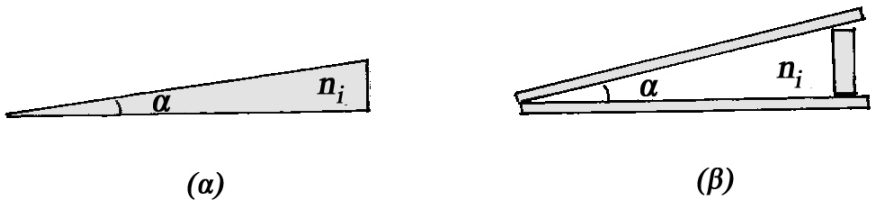
(Еик. 6.5.2.2)

Επίσης τέτοιου είδους εικόνες (έγχρωμες όμως ως επί το πλείστον), βλέπουμε συχνά στους δρόμους τις βροχερές μέρες. Προέρχονται συνήθως (βλ. § 6.9: Ανάδειξη φαινομένων που σχετίζονται με τη συμβολή του φωτός), από ανισοπαχή λεπτά υμένια χυμένου λαδιού αυτοκινήτων, τα οποία εκτείνονται στην επιφάνεια της ασφάλτου. Οι ανωμαλίες μεταξύ της ασφάλτου και του υμενίου του λαδιού, έχουν εξομαλυνθεί από το ενδιάμεσο στρώμα νερού. Οι παρατηρούμενοι έγχρωμοι κροσσοί, οφείλονται στο ότι το προσπίπτον από το περιβάλλον φως είναι πολυχρωματικό. Αυτό θα έχει σαν συνέπεια να εντοπίζονται κατανομές κροσσών συμβολής διαφορετικών χρωμάτων σε διαφορετικές θέσεις.

Μια από τις απλούστερες μορφές πλακιδίων μεταβλητού πάχους είναι τα σφηνοειδή, τα οποία και θα μελετήσουμε στα επόμενα. Θα πρέπει επίσης να διευκρινίσουμε ότι οι κροσσοί συμβολής, λαμβάνονται από τις προαναφερόμενες διατάξεις ανεξάρτητα του τρόπου φωτισμού των πλακιδίων από σημειακές ή εκτεταμένες πηγές. Όταν ο φωτισμός των υμενίων γίνεται σχεδόν κάθετα, τότε οι κροσσοί που παίρνουμε ονομάζονται ***κροσσοί Fizeau (Fizeau fringes)***.

Συμβολή από σφηνοειδές πλακίδιο

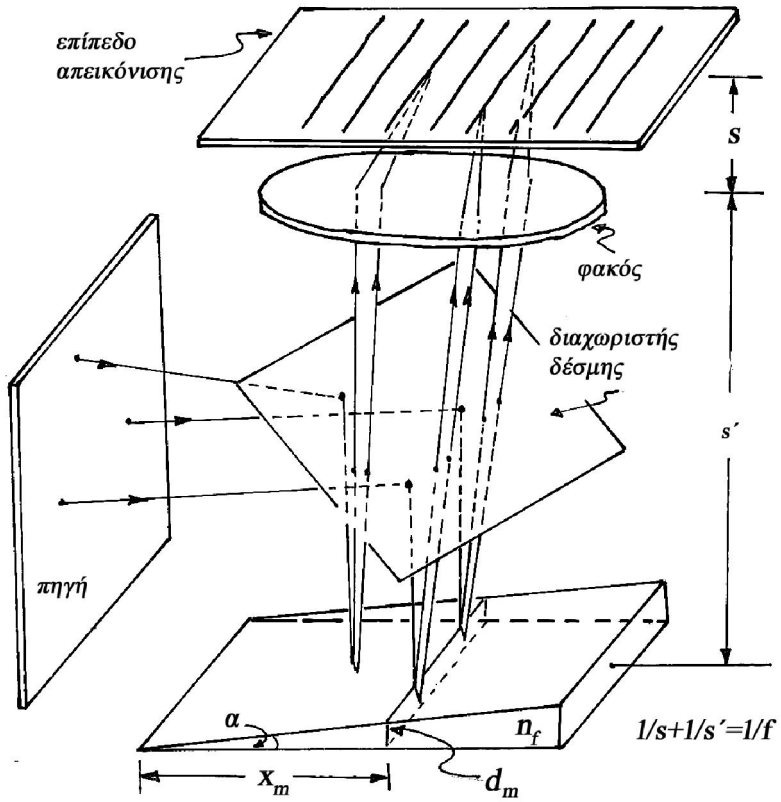
Τα σφηνοειδούς μορφής πλακίδια μπορούν να κατασκευαστούν από τη διαμόρφωση ενός υλικού δ.δ. n_f σε σφήνα, πολύ μικρής όμως διαθλαστικής γωνίας (Σχ. 6.5.2.3α) της τάξης π.χ. του κλάσματος της μοίρας. Ένας πολύ πιο εύκολος τρόπος δημιουργίας τέτοιων συστημάτων είναι με τη βοήθεια δύο γυάλινων πλακών (Σχ. 6.5.2.3β) τις οποίες στο ένα τους άκρο διαχωρίζουμε με ένα εμπόδιο (π.χ. ένα φύλλο λεπτού χαρτιού). Τότε η σφήνα θ' αποτελείται από αέρα του οποίου ο



(Σχ. 6.5.2.3)

δ.δ. είναι $n_f \simeq 1.0$ ή μπορεί να πληρούται από ένα υγρό με δ.δ. $n_f > 1.0$. Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε μια σφήνα (Σχ. 6.5.2.4) γωνίας a και δ.δ. n_f. Τότε για μια σχεδόν κάθετα προσπίπτουσα από την εκτεταμένη πηγή διαταραχή σε απόσταση x_m από την κορυφή της σφήνας – όπου το πάχος της είναι d_m – θα δημιουργηθούν

με διαίρεση πλάτους δύο. Η πρώτη είναι η ανακλώμενη στο πάνω μέρος της σφήνας και η άλλη από το κάτω κατόπιν διάθλασης. Κατά τα γνωστά, εκτός της διαφοράς φάσης λόγω διάνυσης από την κάθε μια διαφορετικών οπτικών δρόμων, θα υπάρχει και η πρόσθετη φάση των 180^0 λόγω του ότι η πρώτη ανακλάται από οπτικά αραιότερο σε οπτικά πυκνότερο μέσο (εφόσον βέβαια $n_1 < n_f$ όπου n_1 ο δ.δ. του



(Σχ. 6.5.2.4)

περιβάλλοντος της σφήνα μέσου). Οι δύο διαταραχές διαδίδονται με κάποια κλίση και διαπερνώντας τον διαχωριστή, με τη βοήθεια του φακού έρχονται σε επαλληλία και συμβάλλουν σ' ένα επίπεδο. Είναι αυτονόητο ότι για να συμβεί αυτό, θα πρέπει μεταξύ τους να είναι σύμφωνες δηλ. η διαφορά των οπτικών τους δρόμων να είναι μικρότερος από το μήκος συμφωνίας των διαταραχών. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τις συνθήκες μεγίστων – ελαχίστων συμβολής που δίνονται από τις σχέσεις (σχ. 6.5.1.5,6). Τότε θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll} \max: & d\cos\theta_t = (2m+1)\dfrac{\lambda_f}{4} \\ \min: & d\cos\theta_t = 2m\dfrac{\lambda_f}{4} \end{array}\right\} \quad m = 0, 1, 2 \ldots \qquad (6.5.2.1)$$

Για σχεδόν κάθετο φωτισμό $\cos\theta_t \simeq 1$. Και επειδή $n_f = \lambda_0/\lambda_f$ όπου λ_0 το μ.κ. της ακτινοβολίας στον ελεύθερο χώρο τότε οι (σχ. 6.5.2.1) γράφονται:

$$\left.\begin{array}{l} \max: \ 2dn_f = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_o \\ \min: \ 2dn_f = m\lambda_o \end{array}\right\} m = 0,1,2,... \qquad (6.5.2.2)$$

Με τη βοήθεια του (Σχ. 6.5.2.4), επειδή η γωνία a είναι πολύ μικρή, βρίσκουμε ότι: $d = xa$ όπου x η θέση σχηματισμού ενός κροσσού μετρούμενη από την ακμή της σφήνας και d το πάχος της στην ίδια θέση. Επομένως αν υποθέσουμε ότι στην θέση αυτή πληρούται η συνθήκη σχηματισμού του m τάξης μεγίστου ή ελαχίστου αντίστοιχα τότε οι (σχ. 6.5.2.2) γίνονται :

$$\left.\begin{array}{l} \max: \ 2x_m \alpha n_f = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_o \\ \min: \ 2x_m \alpha n_f = m\lambda_o \end{array}\right\} m = 0,1,2,... \qquad (6.5.2.3)$$

Από τον τύπο που μας δίνει τα μέγιστα συμβολής θα έχουμε:

$$\max: \ x_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_o}{2\alpha n_f} \qquad m = 0,1,2,... \qquad (6.5.2.4)$$

Επομένως οι θέσεις των μεγίστων θα εντοπίζονται σε αποστάσεις από την ακμή της σφήνας κατά σειρά: $\lambda_o/4\alpha n_f, 3\lambda_o/4\alpha n_f, 5\lambda_o/4\alpha n_f, ...$ Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων (περίοδος) θα είναι:

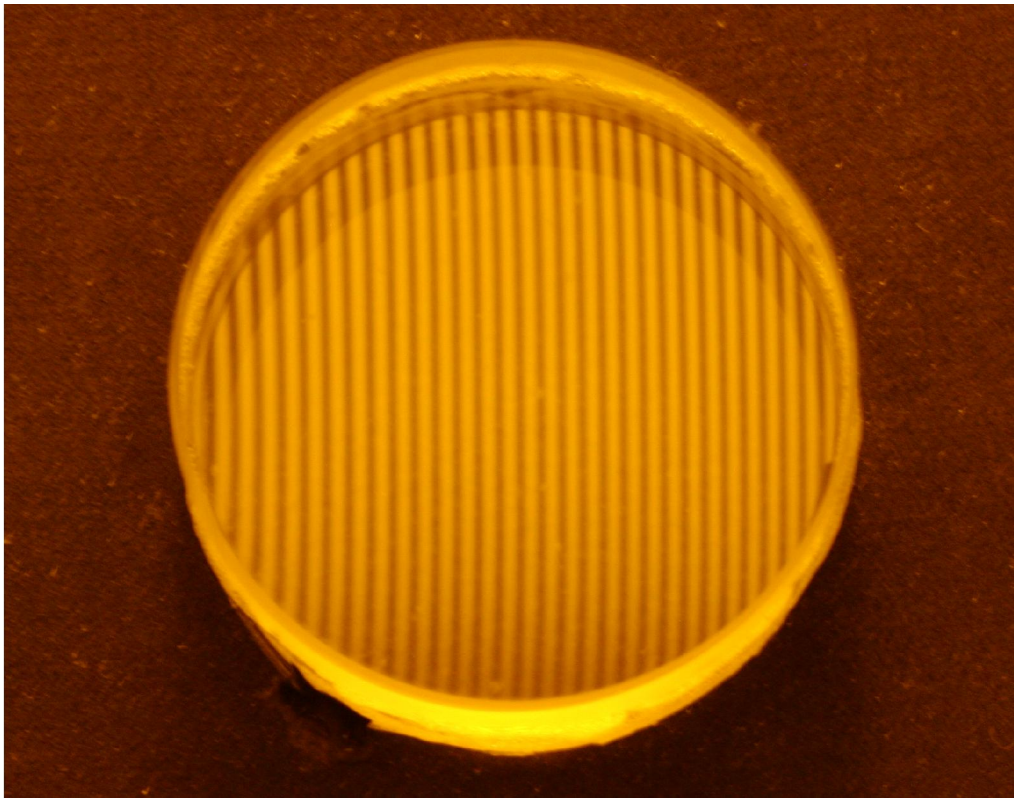
$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \lambda_0/2an_f \qquad (6.5.2.5)$$

Επίσης η διαφορά στο πάχος του υμενίου μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων θα είναι $d_{m+1} - d_m = a\left(x_{m+1} - x_m\right)\lambda_0/2n_f$. Τέλος το πάχος του υμενίου στη θέση σχηματισμού του m τάξης μεγίστου θα δίνεται από τη σχέση:

$$d_m = ax_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_o}{2n_f} \quad m = 0,1,2,.... \qquad (6.5.2.6)$$

Οι σχηματιζόμενοι από τη σφήνα κροσσοί θα είναι ευθύγραμμοι και παράλληλοι προς την ακμή της. Ο λόγος είναι ότι κατά μήκος της και παράλληλα προς αυτήν,

σε μια οποιαδήποτε θέση x_m, το πάχος της θα είναι σταθερό. Στη θέση για την οποία $x = 0$, αντιστοιχεί σκοτεινός κροσσός. Πράγματι από τη σχέση $2x_m a n_f = m\lambda_0$, $m = 0,1,2,...$ για $m = 0 \Rightarrow x_0 = 0$. Στην (Εικ. 6.5.2.5) μπορούμε να δούμε τους κροσσούς συμβολής που σχηματίζονται μέσω μιας σφήνας από αέρα (μεταξύ δύο οπτικά επίπεδων κυκλικών πλακών) και η οποία φωτίζεται σχεδόν κάθετα από εκτεταμένη πηγή με φως από φασματική λυχνία Na.



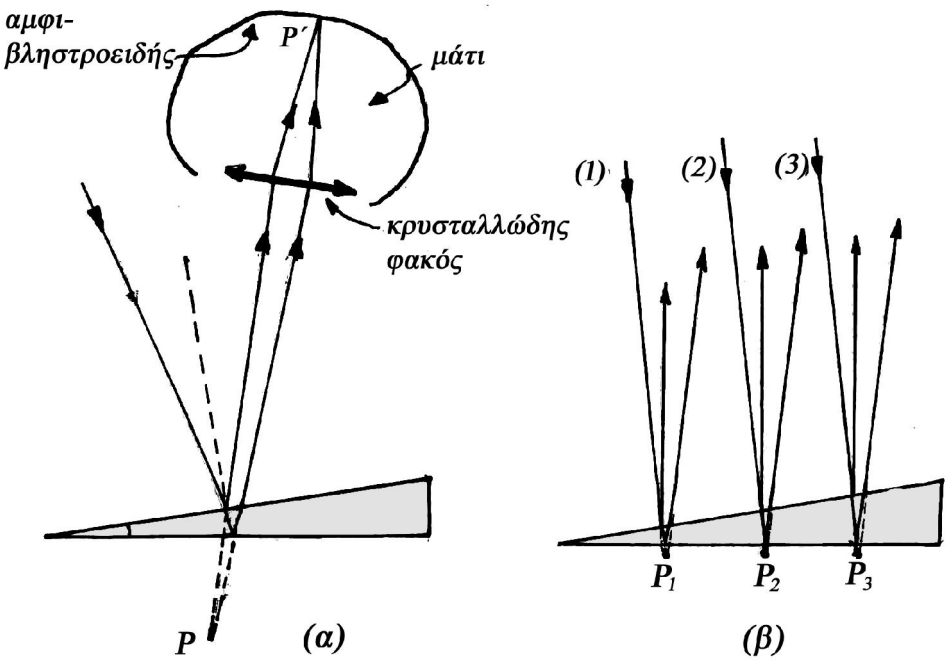
(Εικ. 6.5.2.5)

Παράδειγμα

Δύο ίδια πλακίδια από γυαλί μήκους 10cm, εφάπτονται στο ένα άκρο τους, ενώ στο άλλο απέχουν κατά 0.1mm σχηματίζοντας έτσι ένα υμένιο αέρα σε σχήμα λεπτής σφήνας. Πόσους κροσσούς ανά mm μπορούμε να παρατηρήσουμε φωτίζοντας το σύστημα σχεδόν κάθετα με φως μ.κ. 632.8nm;

- Η γωνία που σχηματίζουν τα δύο πλακίδια της σφήνας θα δίνεται από τη σχέση: $\tan a \simeq a = 0.1/100 = 0.001\text{rad}$. Επομένως η περίοδος των κροσσών συμβολής με βάση τη (σχ. 6.5.2.5) θα είναι $\Delta x = \lambda_0/2a \left(n_f = 1.0\right) \simeq 0.316\text{mm}$. Άρα ο αριθμός των κροσσών ανά mm θα είναι: $N = 1/\Delta x \simeq 3.16$.

Η θέση στην οποία βλέπουμε να σχηματίζονται οι κροσσοί συμβολής, εξαρτάται από τη θέση στην οποία βρίσκεται η πηγή σε σχέση με τη σφήνα, καθώς και το μέγεθος της διαθλαστική της γωνίας *. Μια τέτοια διαδικασία φαίνεται ενδεικτι-

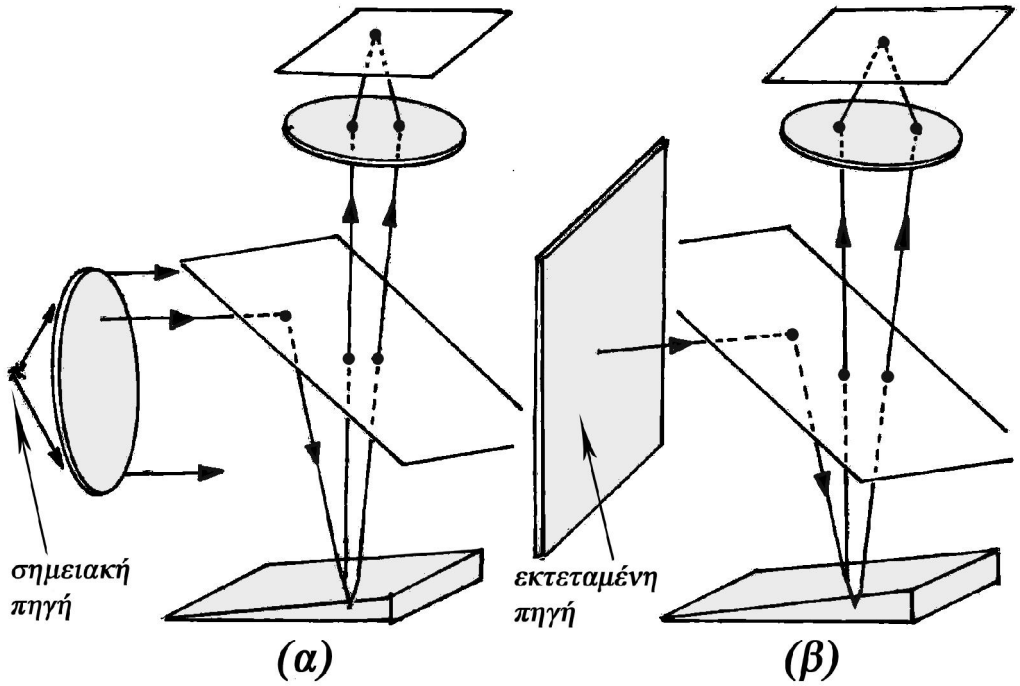


(Σχ. 6.5.2.6)

κά στα (Σχ. 6.5.2.6). Στο (Σχ. 6.5.2.6α) οι δύο αποκλίνουσες διαταραχές, οι ανακλώμενες από τις δύο επιφάνειες της σφήνας, νοητά φαίνεται να συμβάλλουν στο σημείο P, σημείο στο οποίο τέμνονται οι προεκτάσεις τους. Το σημείο P βρίσκεται εκτός της σφήνας, επειδή η διαθλαστική της γωνία για τη συγκεκριμένη περίπτωση είναι μεγάλη και η προσπίπτουσα διαταραχή έχει επίσης μεγάλη κλίση σε σχέση με την κατακόρυφη στην κάτω της επιφάνεια (μη κάθετος φωτισμός) Αν τώρα προσαρμόσουμε το μάτι μας έτσι ώστε να βλέπουμε καθαρά το σημείο P, τότε στην πραγματικότητα οι αποκλίνουσες διαταραχές θα συμβάλλουν στο σημείο P' του αμφιβληστροειδούς. Το P' είναι συζυγές του P ως προς τον κρυσταλλώδη φακό. Άρα το πρότυπο συμβολής σχηματίζεται στο μάτι μας και κατά τα γνωστά, λόγω του ότι το τελευταίο 'βλέπει' κατά την προέκταση της διεύθυνσης των συμβαλλουσών διαταραχών, έχουμε την εντύπωση ότι οι κροσσοί σχηματίζονται στην περιοχή του σημείου P. Αν βέβαια όπως φαίνεται στο (Σχ. 8.2.2.6β) η σφήνα είναι λεπτή και ο φωτισμός είναι σχεδόν κάθετος, τότε τα σημεία σύγκλισης P_1, P_2, P_3 των αποκλινουσών ζευγών διαταραχών για όλες τις προσπίπτουσες θα βρίσκονται σχεδόν σε επαφή με την κάτω επιφάνειά της.

* Max. Born and E. Wolf: 'Principles of Optics' 7th edition (§ 7.5.3). Cambridge Un. Press U.K. (1999).

Για να φωτίσουμε το σφήνα σχεδόν κάθετα, μπορούμε όπως φαίνεται στο (Σχ. 6.5.2.7α) να χρησιμοποιήσουμε σημειακή πηγή τοποθετημένη στο εμπρός εστιακό επίπεδο ενός θετικού φακού. Τότε το προκύπτον μέτωπο κύματος είναι επίπεδο, που τμήμα του με τη βοήθεια ενός διαχωριστή δέσμης – με κλίση σχεδόν 45^0 ως προς το επίπεδο της σφήνας – πέφτει σχεδόν κάθετα στην επιφάνειά της. Η



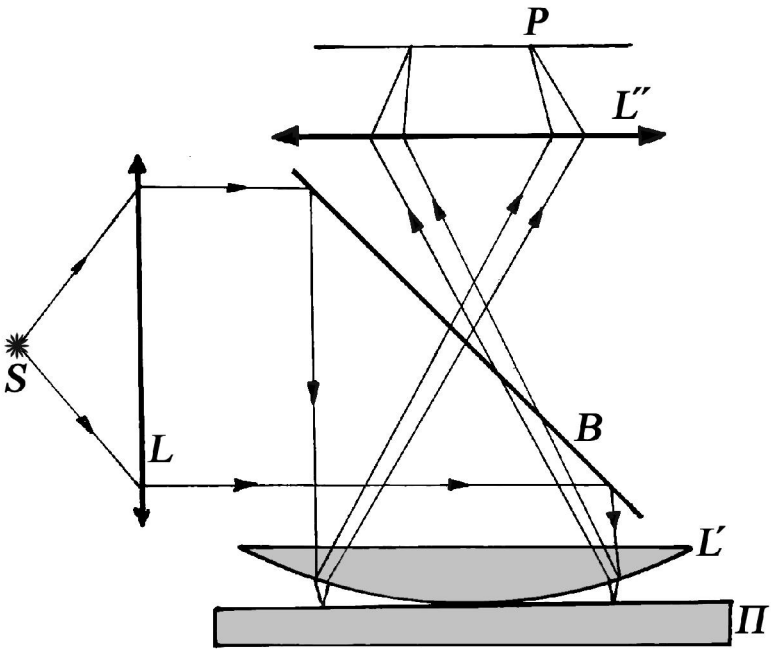
(Σχ. 6.5.2.7)

σημειακή πηγή όμως, παρά το ότι σχηματίζει κροσσούς μεγάλης φωτοαντίθεσης, έχει το μειονέκτημα ότι μας δίνει πρότυπο συμβολής μικρής λαμπρότητας. Για το λόγο αυτό αναζητούνται τρόποι φωτισμού με τη βοήθεια εκτεταμένων πηγών.

Στη γενικότερη περίπτωση φωτισμού μιας συμβολομετρικής διάταξης μ' εκτεταμένη πηγή, η φωτοαντίθεση των κροσσών συμβολής ελαττώνεται (βλ. ΘΕΜΑ 2). Το γεγονός οφείλεται στην ασύμφωνη επαλληλία (πρόσθεση εντάσεων) των προτύπων συμβολής που προκύπτουν από τα διαφορετικά σημεία της πηγής και που παρουσιάζουν γενικά διαφορές φάσης μεταξύ τους. Υφίσταται όμως – όπως αποδεικνύεται – μία περίπτωση κατά την οποία έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε επίπεδα εκτεταμένη πηγή χωρίς ελάττωση της φωτοαντίθεσης των κροσσών και με ταυτόχρονη αύξηση της λαμπρότητάς τους. Ο κανόνας είναι ο εξής: *Το επίπεδο της εκτεταμένης πηγής, πρέπει να είναι σχεδόν παράλληλο με το επίπεδο το οποίο ορίζεται από την διχοτόμο των διευθύνσεων των δύο προς συσχετισμό αποκλινουσών διαταραχών και της καθέτου προς αυτές*. Η συγκεκριμένη συνθήκη πληρούται από την εκτεταμένη πηγή που φωτίζει τη διάταξη του (Σχ. 6.5.2.7β).

Διάταξη Newton

Η διάταξη με την οποία γίνεται δυνατή η λήψη ενός προτύπου συμβολής κυκλικής συμμετρίας κροσσών ίσου πάχους φαίνεται στο (Σχ. 6.5.2.8). Αν και ο φωτισμός του συστήματος μπορεί να γίνει όπως προαναφέραμε με εκτεταμένη πηγή, προκειμένου να δοθεί έμφαση στον κάθετο τρόπο φωτισμού χρησιμοποιούμε τη σημειακή πηγή S όπου με τη βοήθεια του θετικού φακού L παίρνουμε ένα επίπεδο μέτωπο κύματος.

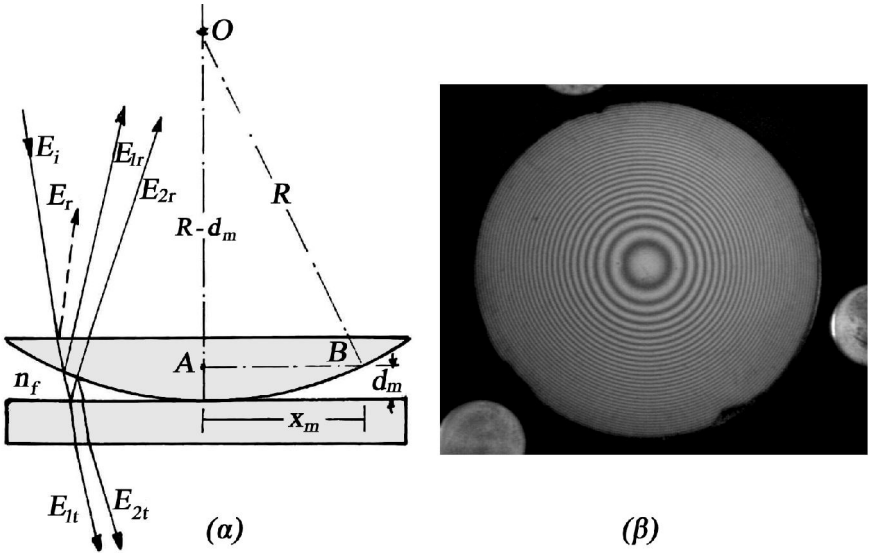


(Σχ. 6.5.2.8)

Τότε μέσω ενός διαχωριστή δέσμης B σε θέση 45^0 ως προς την οριζόντια φωτίζουμε σχεδόν κάθετα το εξής σύστημα: Πρόκειται για ένα πλακίδιο Π με παράλληλες έδρες, το οποίο είναι οπτικά επίπεδο. Επάνω του ακριβώς είναι τοποθετημένος ένας επιπεδόκυρτος φακός L' μεγάλης ακτίνας καμπυλότητας (π.χ. 30m), με τα κυρτά προς τα κάτω. Τότε μεταξύ φακού L' και πλακιδίου Π σχηματίζεται μια σφήνα από αέρα μεταβλητής βέβαια διαθλαστικής γωνίας. Στο σχήμα η σφήνα αυτή υπερτονίζεται για εποπτικούς λόγους, ενώ στην πραγματικότητα είναι πολύ μικρού πάχους. Όπως θα δούμε στα επόμενα, αποτελεί τη γενεσιουργό αιτία ενός κυκλικής συμμετρίας συμβολογραφήματος το οποίο αποκαλείται ***δακτύλιοι του Newton (Newton rings)***.

Πράγματι μια διαταραχή η οποία προσπίπτει σχεδόν κάθετα στην πάνω επιφάνεια της σφήνας, κατά τα γνωστά, μερικώς ανακλάται και μερικώς διαθλάται

προς το εσωτερικό της. Η διαθλώμενη ανακλάται στην πάνω επιφάνεια του πλακιδίου Π και συνεχίζει διαδιδόμενη με μια μικρή κλίση ως προς την πρώτη. Τελικά οι δύο διαταραχές μέσω ενός φακού L'' είναι δυνατόν να έλθουν σε επαλληλία και εφόσον πληρούνται οι συνθήκες συμφωνίας να συμβάλλουν σ' ένα σημείο P του επιπέδου απεικόνισης. Γίνεται εύκολα κατανοητό ότι λόγω της κυκλικής συμμετρίας της σφήνας, οι γεωμετρικοί τόποι των μεγίστων και ελαχίστων της κατανομής της έντασης θ' αποτελούν κυκλικούς δακτυλίους με κέντρο συμμετρίας το σημείο επαφής φακού και πλακιδίου. Στην περίπτωση που η παρατήρηση γίνει μέσω του ματιού μας, θα βλέπουμε το πρότυπο συμβολής σαν να σχηματίζεται στο χώρο ανάμεσα στη σφήνα με την προϋπόθεση βέβαια ότι ο φωτισμός είναι σχεδόν κάθετος. Η (Εικ. 6.5.2.9β) μας δείχνει τη μορφολογία του προτύπου συμβολής των δακτυλίων του Newton.



(Σχ. 6.5.2.9)

Οι συνθήκες μεγίστων και ελαχίστων συμβολής τάξης m θα δίνονται κατά τα γνωστά από τις (σχ. 6.5.2.2) και ισχύουν για σχεδόν κάθετο φωτισμό:

$$\left.\begin{array}{ll} \max: & 2d_m n_f = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_0 \\ \min: & 2d_m n_f = m\lambda_0 \end{array}\right\} \quad m = 0,1,2... \qquad (6.5.2.7)$$

Όμως από το (Σχ. 6.5.2.9α) και συγκεκριμένα από το τρίγωνο OAB βρίσκουμε ότι $x_m^2 = R^2 - \left(R-d_m\right)^2 = 2Rd_m - d_m^2$ και επειδή $R \gg d_m$ θα έχουμε:

$$x_m^2 = 2Rd_m \qquad (6.5.2.8)$$

Τότε με συνδυασμό των (σχ. 6.5.2.7,8) βρίσκουμε ότι οι ακτίνες x_m οι οποίες αντιστοιχούν σε θέσεις μεγίστων ή ελαχίστων συμβολής θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} \max: \quad x_m &= \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0 R}{n_f}\right]^{1/2} \\ \min: \quad x_m &= \left[\frac{m\lambda_0 R}{n_f}\right]^{1/2} \end{aligned}\right\} \; m = 0, 1, 2, ... \qquad (6.5.2.9)$$

όπου n_f ο δ.δ. της σφήνας (για τον αέρα $n_f \simeq 1.0$) και λ_0 το μ.κ. στον ελεύθερο χώρο. Είναι προφανές από την δεύτερη των (σχ. 6.5.2.9) ότι το κέντρο του προτύπου των δακτυλίων του Newton (εκεί όπου $d_m = 0 \rightarrow x_m = 0$) αντιστοιχεί σε ελάχιστο συμβολής δηλ. σε σκοτεινό κροσσό. Το αντίθετο ακριβώς θα συμβαίνει για την αλληλουχία εμφάνισης των κροσσών του προτύπου συμβολής των δακτυλίων του Newton όσον αφορά τις διαθλώμενες διαταραχές (δηλ. τις αναδυόμενες από την κάτω επιφάνεια του πλακιδίου) (βλ. Σχ. 6.5.2.9α). Τότε το κέντρο του θα αντιστοιχεί σε μέγιστο συμβολής δηλ. θα καταλαμβάνεται από φωτεινό κροσσό. Το γεγονός οφείλεται – όπως είναι ήδη γνωστό – στο ότι η διαταραχή με πλάτος E_{2t} ανακλάται δύο φορές από οπτικά αραιότερο σε οπτικά πυκνότερο μέσο (εφόσον $n_f < n$) ενώ η E_{1t} καμία. Δηλ. στην πραγματικότητα θα έχουμε αντιστροφή της φωτοαντίθεσης μεταξύ των δύο προτύπων συμβολής.

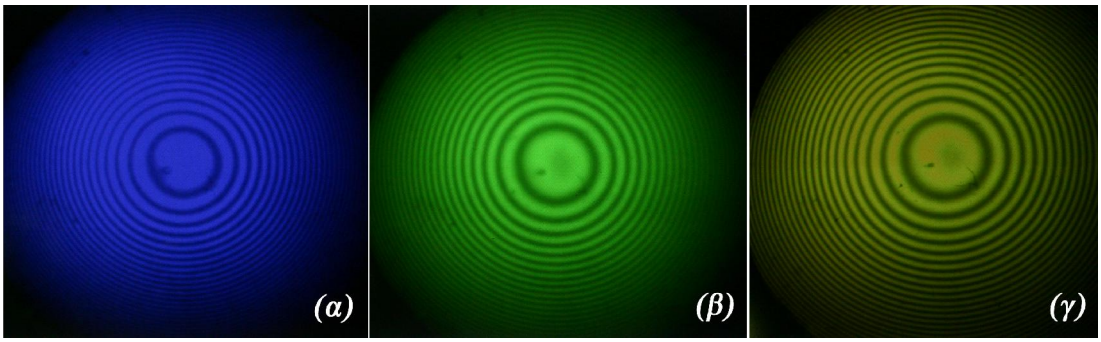
Παράδειγμα

Επιπεδόκυρτος φακός ακτίνας καμπυλότητας $R = 30\text{cm}$, εφάπτεται με το κυρτό του μέρος σε οπτικά επίπεδη επιφάνεια και φωτίζεται σχεδόν κάθετα με το φως λυχνίας Na με $\lambda_0 = 589.29\text{nm}$. Να υπολογιστεί κατ' αρχή ο λόγος των ακτίνων m τάξης των σκοτεινών κροσσών για τις δύο περιπτώσεις όπου το ενδιάμεσο της σφήνας είναι ο αέρας $n_{fa} = 1.0$ και όταν πληρούται από γλυκερίνη με δ.δ. $n_{fg} = 1.4721$. Ποιο είναι το μήκος των ακτίνων τάξης $m = 20$ για κάθε κροσσό;

- Η σχέση που μας δίνει το μήκος της ακτίνας σκοτεινού κροσσού τάξης m όταν ο δ.δ. της σφήνας είναι n_f δίνεται από τη σχέση: $x_m^2 = m\lambda_0 R / n_f$. Επομένως ο λόγος των ακτίνων για τις δύο περιπτώσεις είναι: $x_{m\alpha} / x_{mg} = \sqrt{n_{fg} / n_{fa}}$. Δηλ. δεν ε-

ξαρτάται από την τάξη m. Επειδή $n_{fa} = 1.0$ και $n_{fg} = 1.4721$ βρίσκουμε: $x_{ma}/x_{mg} = 1.2133$. Επίσης από την πρώτη σχέση βρίσκουμε: $(x_{20})_a = 15.497\text{mm}$ και $(x_{20})_g = 18.8\text{mm}$.

Ένα ερώτημα το οποίο θα μπορούσε να τεθεί είναι για ποιο λόγο εκτός των διαταραχών με πλάτη E_{1r}, E_{2r} να μην συσχετίζεται μεταξύ τους και η διαταραχή E_r η προκύπτουσα από την πρώτη ανακλώμενη στην πάνω επιφάνεια του φακού (Σχ. 6.5.2.9α). Η απάντηση δίνεται με τη βοήθεια της εφαρμογής των συνθηκών συμφωνίας. Πράγματι αν φωτίσουμε τη διάταξη (γεγονός που αποτελεί συνήθη τακτική) με ψευδομονοχρωματικό φως (π.χ. φως της πράσινης γραμμής της φασματικής λυχνίας Hg), τότε η διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ των E_r και των E_{1r}, E_{2r} θα είναι στις περισσότερες των περιπτώσεων μεγαλύτερη του μήκους συμφωνίας αυτού του φωτός. Επομένως ερχόμενες σε επαλληλία δεν θα μπορούν να συσχετιστούν. Αν όμως η διάταξη φωτιστεί με φως που προέρχεται από πηγή Laser, τότε λόγω του μεγάλου μήκους συμφωνίας αυτών των διαταραχών θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όσον αφορά την εφαρμογή των προαναφερομένων σχέσεων. Στις (Εικ. 6.5.2.10α,β,γ) μπορούμε να δούμε τα πρότυπα συμβολής των δακτυλίων Newton, που λαμβάνονται διαδοχικά για τρία μ.κ. ψευδομονοχρωματικού φωτός που προέρχονται από το φωτισμό της διάταξης του (Σχ. 6.5.2.8) (από λυχνία Hg) μέσω μιας εκτεταμένης πηγής. Οι φασματικές γραμμές: Ιώδης $(\lambda \simeq 405\text{nm})$, Πράσινη $(\lambda \simeq 546\text{nm})$ και Κίτρινη $(\lambda \simeq 578\text{nm})$ απομονώνονται διαδοχικά με τη χρήση κατάλληλων συμβολομετρικών φίλτρων (βλ. § 6.8.3).



(Σχ. 6.5.2.10)

Οι σχηματιζόμενοι δακτύλιοι, Newton είναι κροσσοί ίσου πάχους και η ακρίβεια της καμπυλότητάς τους αφορά άμεσα την ακρίβεια της σφαιρικότητας του φακού. Αν κατά τη διαδικασία λείανσής του παραμείνουν επιφανειακές ανωμαλίες, τότε το παρατηρούμενο πρότυπο συμβολής θα εμφανίσει παραμορφώσεις χαρακτηριστικές των σφαλμάτων. Τα προηγούμενα με την προϋπόθεση ότι το πλακίδιο με

το οποίο βρίσκεται σε επαφή ο φακός είναι οπτικά επίπεδο έτσι ώστε να μην εμφανίζει σφάλματα χρησιμοποιούμενο σαν αναφορά. Ένα σύνηθες υλικό κατασκευής πλακιδίων αναφοράς είναι ο τετηγμένος χαλαζίας, ο οποίος είναι δύσκαμπτος, παρουσιάζει μεγάλη σκληρότητα και έχει πολύ μικρό συντελεστή θερμικής διαστολής. Πλακίδια από σύνθετες ενώσεις γυαλιού-κεραμικών χαρακτηρίζονται από πολύ μικρότερους συντελεστές θερμικής διαστολής και τα όρια της οπτικής τους επιπεδότητας μπορούν να φθάσουν σε τιμές μικρότερες του $\lambda/200$. Το πάνω όριο του $\lambda/4$ είναι εντελώς απαραίτητο προκειμένου να μην έχουμε σημαντική παραμόρφωση του μετώπου κύματος. Αν π.χ. για δύο παραπλήσια σημεία της επιφάνειας το σφάλμα στην επιπεδότητα είναι $\lambda/2$ (δηλ. το μισό του χρησιμοποιούμενου μ.κ της φωτίζουσας τη διάταξη ακτινοβολίας), τότε οι διαταραχές οι προερχόμενες από αυτά τα σημεία, αντί να βρίσκονται σε φάση θα είναι σε αντίθεση φάσης (δηλ. θα διαφέρουν κατά $\Delta\phi = 180^0$) γεγονός που είναι εντελώς ανεπιθύμητο. Γίνεται τελικά κατανοητό από τα προαναφερόμενα, ότι μέσω της συμβολομετρίας, μπορούν να προκύψουν μεγάλης ακρίβειας μέθοδες ποιοτικού και ποσοτικού ελέγχου (μετρολογίας). Στα επόμενα με τη μελέτη των συμβολόμετρων Michelson και Fabry-Perot, οι μέθοδες θα γίνουν περισσότερο κατανοητές.

6.5.3 *Εντοπισμένοι και μη εντοπισμένοι κροσσοί συμβολής*

Σημαντικής σημασίας ζητούμενο για τη συμβολομετρία, είναι η περιοχή στην οποία σχηματίζονται οι κροσσοί συμβολής για τα διάφορα είδη συμβολόμετρων και συμβομετρικών διατάξεων. Μέχρις εδώ έχουμε περιγράψει και αναλύσει στοιχειωδώς τις διατάξεις συμβολής Young (§ 6.4.1), μέσω διαίρεσης μετ. κύματος καθώς και αυτές της διαίρεσης πλάτους (επίπεδα πλακίδια διηλεκτρικού (§ 6.5.1) όπως και μέσω σφηνοειδών υμενίων (§ 6.5.2). Μια από τις βασικές παραμέτρους η οποία παίζει καθοριστικό ρόλο στο είδος και την περιοχή όπου σχηματίζονται οι κροσσοί συμβολής δηλ. τα όρια του χώρου που εντοπίζονται, είναι και το μέγεθος τις φωτίζουσας πηγής, δηλ. αν αυτή είναι σημειακή ή εκτεταμένη.

Πράγματι κατά την περιγραφή του πειράματος του Young είχαμε προσδιορίσει το πρότυπο συμβολής που αναπτύσσεται στο χώρο ο οποίος περιβάλλει τις δύο δευτερεύουσες σύμφωνες σημειακές πηγές. Είχαμε δει ότι οι θέσεις των μεγίστων και ελαχίστων της έντασης του φωτός (όπως και οποιαδήποτε άλλη ενδιάμεση κατάσταση), βρίσκονται στην επιφάνεια ζευγών υπερβολοειδών (Σχ. 6.4.1.12,15), των οποίων οι εστίες κατέχονται από τις δευτερεύουσες σημειακές πηγές. Εκεί ορίσαμε σαν κροσσούς συμβολής, τα σημεία τομής ενός οποιουδήποτε επιπέδου με τις προαναφερόμενες επιφάνειες. Τέτοιου είδους συστήματα κροσσών συμβολής, μπορούμε ν' ανιχνεύσουμε σ' οποιαδήποτε περιοχή του χώρου που περιβάλλει τις δύο

πηγές. Χαρακτηριστικό αυτών των κροσσών είναι ότι σχηματίζονται από συγκλίνουσες διαταραχές δηλ. είναι ***πραγματικοί (real fringes)*** που σημαίνει ότι μπορούμε να τους πάρουμε πάνω σ' ένα πέτασμα. Ονομάζονται και ***μη εντοπισμένοι (non-localized)*** για τον απλούστατο λόγο ότι δεν εντοπίζονται πάνω σ' ένα και μόνο επίπεδο ή μικρή περιοχή του χώρου αλλά σχεδόν παντού. Οι κροσσοί λοιπόν συμβολής που δημιουργούνται από διατάξεις που ανάγονται στο πείραμα του Young είναι πραγματικοί και μη εντοπισμένοι.

Με ποιο τρόπο όμως σχηματίζονται κροσσοί συμβολής από διαίρεση πλάτους μέσω λεπτού πλακιδίου σταθερού πάχους όταν αυτό φωτίζεται από εκτεταμένη πηγή που εκπέμπει ψευδομονοχρωματικό φως; Εκεί είδαμε (§ 6.5.1) ότι μόνο οι διαταραχές που προέρχονται από διαφορετικά σημεία της πηγής και προσπίπτουν στο πλακίδιο με την ίδια κλίση δημιουργούν ζεύγη δευτερευόντων διαταραχών οι οποίες μεταξύ τους έχουν την ίδια διαφορά φάσης (Σχ. 6.5.1.4, 5). Οι δύο διαταραχές του κάθε ζεύγους είναι σύμφωνες όχι όμως και τα διάφορα ζεύγη μεταξύ τους επειδή προέρχονται από διαφορετικά σημεία της εκτεταμένης πηγής, τα οποία κατά τα γνωστά εκπέμπουν με ασύμφωνο τρόπο . Αν τελικά με κάποια διαδικασία φέρουμε σε επαλληλία σ' ένα σημείο τα προαναφερόμενα ζεύγη διαταραχών, τότε οι διαταραχές του κάθε ζεύγους θα συμβάλλουν με τον ίδιο τρόπο και σαν συνολική ένταση θα έχουμε το άθροισμα των εντάσεων του συνόλου των ζευγών. Το γεγονός αυτό αποτελεί κατά τα γνωστά ένα τρόπο ενίσχυσης από σημείο σε σημείο του σχηματιζόμενου προτύπου συμβολής δηλ. αύξησης της λαμπρότητάς του. Το ερώτημα που τίθεται εδώ είναι κατ' αρχή πως γίνεται η παρατήρηση των κροσσών και κατόπιν που ακριβώς σχηματίζονται. Όπως είναι ευνόητο δεν μπορούμε στην περίπτωση αυτή να παρεμβάλλουμε στην πορεία των διαταραχών ένα πέτασμα προκειμένου να σχηματιστούν οι κροσσοί, για τον απλούστατο λόγο ότι οι προς επαλληλία διαταραχές διαδίδονται παράλληλα. Άρα μπορούμε να πούμε ότι οι κροσσοί είναι ***φανταστικοί (virtual)*** και εντοπίζονται σε άπειρη απόσταση. Για το λόγο αυτό αλλάζουμε τρόπο παρατήρησης και χρησιμοποιούμε κατά τα γνωστά ένα φακό (ή άλλο μέσο σύγκλισης), οδηγώντας τα ζεύγη των διαταραχών σε επαλληλία στο πίσω του εστιακό επίπεδο, όπου και σχηματίζεται το πρότυπο συμβολής. Σε περιοχές εκτός αυτού του επιπέδου πρότυπο δεν υφίσταται. Τέτοιου είδους κροσσοί ονομάζονται ***εντοπισμένοι (localized)***, επειδή ο σχηματισμός τους περιορίζεται σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο στο χώρο. Αντί του φακού θα μπορούσαμε για την παρατήρησή τους να χρησιμοποιήσουμε ένα τηλεσκόπιο προσαρμοσμένο βέβαια στο άπειρο. Τέλος μπορούμε να τους δούμε και με το μάτι μας (και εδώ με προσαρμογή του για παρατήρηση στο άπειρο) ή τουλάχιστον ένα τμήμα του προτύπου συμβολής, λόγω του μικρού οπτικού πεδίου όρασης του ματιού. Τότε οι κροσσοί σχηματίζονται στον αμφιβληστροειδή, ανεξάρτητα αν τους βλέπουμε να προέρχονται από την προέκταση των διευθύνσεων των συμβαλλουσών διαταραχών. Κάτω από αυτές τις

συνθήκες οι κροσσοί ίσης κλίσης ανήκουν στην κατηγορία των εντοπισμένων κροσσών. Εκτός όμως των εντοπισμένων κροσσών μέσω του επιπέδου πλακιδίου, είναι δυνατόν να σχηματιστούν και πρότυπα συμβολής μη εντοπισμένων πραγματικών κροσσών. Μια τέτοια διαδικασία περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο (§ 6.5.4).

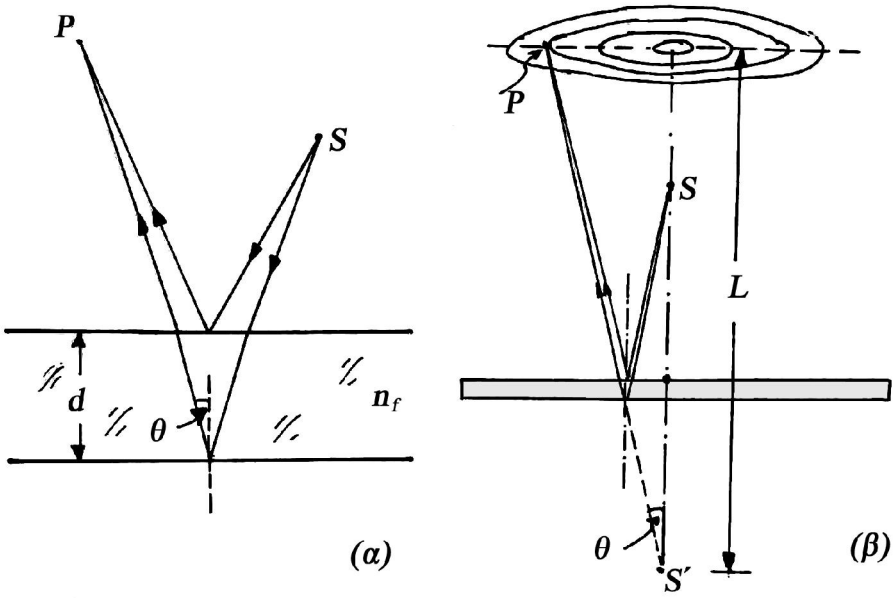
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο σχηματισμός προτύπων συμβολής από πλακίδια σφηνοειδούς μορφής παραδείγματα των οποίων περιγράψαμε στην (§ 6.5.2). Τέτοια ήταν η συμβολή από λεπτή σφήνα μικρής διαθλαστικής γωνίας η οποία φωτιζόταν από σημειακή (ή κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες από εκτεταμένη πηγή), καθώς και η συμβολή μέσω της διάταξης Newton. Τους κροσσούς συμβολής αυτών των προτύπων τους είχαμε κατατάξει στην κατηγορία των κροσσών ίσου πάχους και με συνθήκες σχεδόν καθέτου φωτισμού σ' αυτήν των κροσσών Fizeau. Πιο αυστηρά πρόκειται για εντοπισμένους φανταστικούς κροσσούς (λόγω του σχηματισμού τους από σχετικά αποκλίνουσες διαταραχές) που για την παρατήρησή τους πρέπει να χρησιμοποιηθεί συγκλίνον απεικονίζον σύστημα (όπως ένας φακός ή το μάτι μας) για την απεικόνισή τους σε συγκεκριμένη επιφάνεια. Θα πρέπει οπωσδήποτε να σημειώσουμε ότι εκτός από εντοπισμένοι φανταστικοί κροσσοί μπορούν να δημιουργηθούν και εντοπισμένοι πραγματικοί κροσσοί δηλ. τέτοιοι που να σχηματίζονται από συγκλίνουσες συμβάλλουσες διαταραχές.

6.5.4 *Πρότυπα πραγματικών μη εντοπισμένων κροσσών συμβολής. Συμβολόμετρο του Pohl*

Θεωρούμε σημειακή πηγή S η οποία βρίσκεται σε μια ορισμένη απόσταση από πλακίδιο με παράλληλες έδρες πάχους d και δ.δ. n_f (Σχ. 6.5.4.1α). Για κάθε σημείο P του χώρου στον οποίο βρίσκεται η S, θα υπάρχουν δύο διαταραχές οι οποίες εκπεμπόμενες από την τελευταία και διαδιδόμενες προς το πλακίδιο με διαφορετική κλίση, η μία ανακλώμενη στην πάνω επιφάνειά του και η δεύτερη (μετά από διάθλαση) στην κάτω, θα συναντούνται σ' αυτό. Εφόσον πληρούνται οι συνθήκες συμφωνίας, η επαλληλία των δύο στο P θα μας δώσει φαινόμενα συμβολής. Το γεγονός ισχύει για οποιοδήποτε σημείο του χώρου P (με όριο την πάνω επιφάνεια του πλακιδίου) όπου και δημιουργούνται μη εντοπισμένοι πραγματικοί (από συγκλίνουσες διαταραχές) κροσσοί συμβολής. Με την προϋπόθεση ότι το πλακίδιο είναι πολύ λεπτό (ή ακόμα και για σφήνα πολύ μικρής διαθλαστικής γωνίας), η διαφορά φάσης των διαταραχών στο σημείο P θα δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_o} d n_f \cos\theta \pm \pi \qquad (6.5.4.1)$$

όπου $\pm\pi$ η επιπλέον φάση που οφείλεται στην εξωτερική ανάκλαση της πρώτης διαταραχής από την πάνω επιφάνεια του πλακιδίου και θ η γωνία ανάκλασης της δεύτερης στην κάτω επιφάνεια. Επομένως οι συνθήκες μεγίστων και ελαχίστων συμβολής δίνονται από τις σχέσεις:



(Σχ. 6.5.4.1)

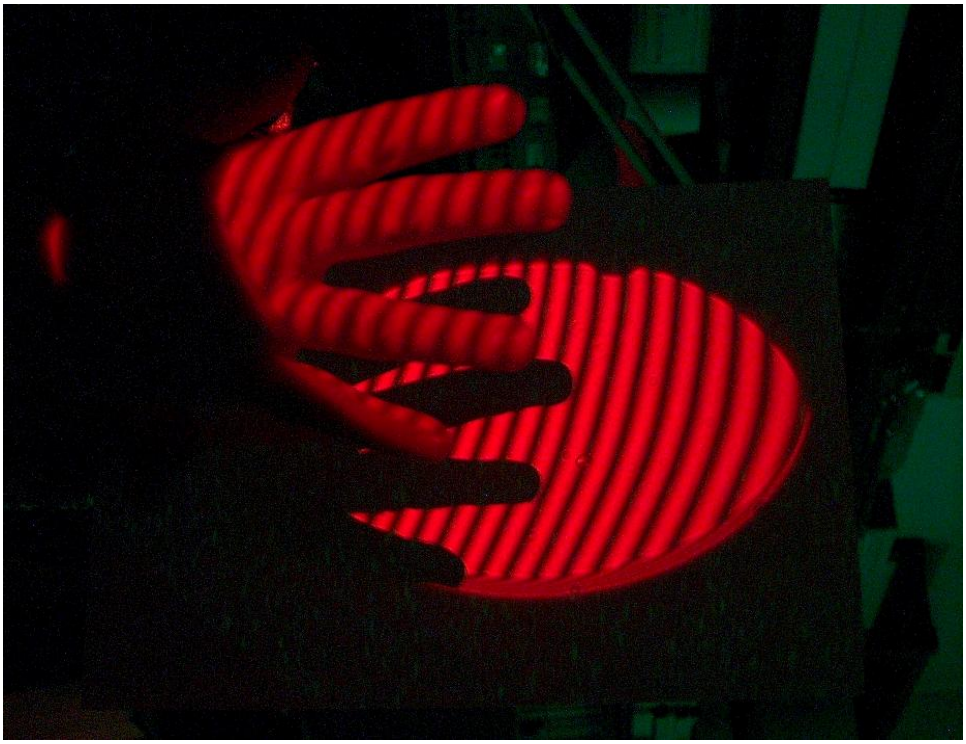
$$\max: \ \delta = 2m\pi \ \Rightarrow \ 2dn_f \cos\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_o \quad m = 0,1,2,... \qquad (6.5.4.2)$$

$$\min: \ \delta = (2m\text{-}1)\pi \ \Rightarrow \ 2dn_f \cos\theta = m\lambda \quad m = 0,1,2,... \qquad (6.5.4.3)$$

Για λόγους συμμετρίας, το πρότυπο συμβολής που σχηματίζεται σ' ένα πέτασμα παράλληλο με το πλακίδιο και σε μια ορισμένη απόσταση από αυτό (Σχ. 6.5.4.1β), αποτελείται από κυκλικούς δακτυλίους. Με τη συγκεκριμένη διάταξη που ονομάζεται ***συμβολόμετρο Pohl***, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε το μ.κ. άγνωστης ακτινοβολίας μετρώντας τις γωνιακές αποκλίσεις στις οποίες σχηματίζονται οι κροσσοί συμβολής τάξης m.

Για να παρατηρήσουμε αυτού του είδους τους κροσσούς με ψευδομονοχρωματικό φως μπορούμε π.χ. να χρησιμοποιήσουμε μια φασματική λυχνία Na, τοποθετώντας στην έξοδό της ένα κυκλικό άνοιγμα περίπου 5mm (σαν σημειακή πηγή) και ένα λεπτό φυλλίδιο από Mica (βλ. Κεφ. 5: Πόλωση του φωτός (§ 5.7.6)) πάχους $d \simeq 0.05$mm σε απόσταση 10cm από την πηγή. Η φωτοαντίθεση των κροσσών

θα είναι πολύ μεγάλη, όταν σαν πηγή χρησιμοποιήσουμε μια αποκλίνουσα στιγματική δέσμη Laser με την οποία θα φωτίσουμε π.χ. μια αντικειμενοφόρο πλάκα μικροσκοπίου πάχους $d = 0.5\text{mm}$. Το μεγάλο πάχος του πλακιδίου δεν αποτελεί πρόβλημα λόγω του μεγάλου βαθμού χρονικής συμφωνίας του Laser.

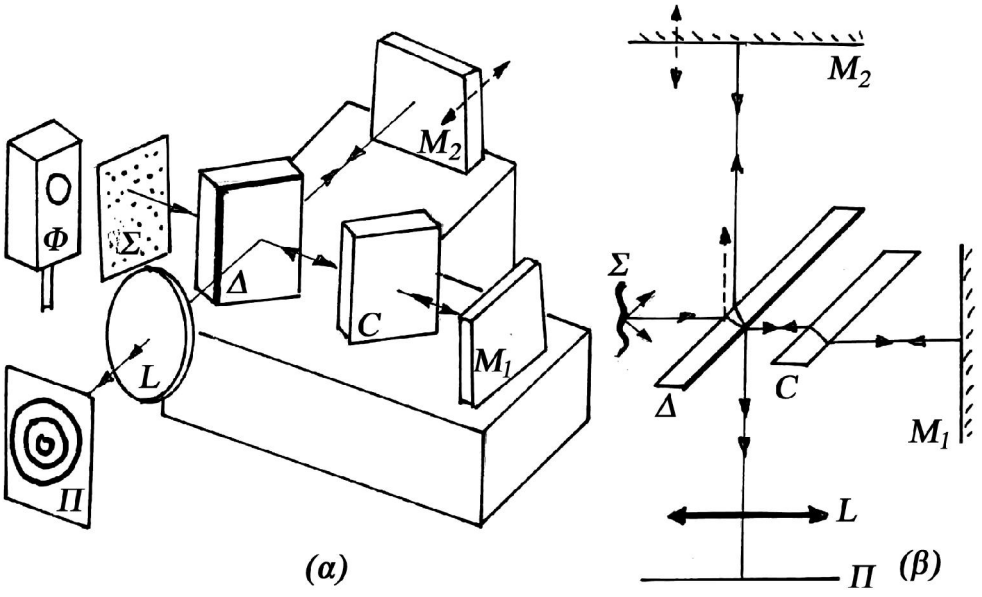


(Εικ. 6.5.4.2)

Στην (Εικ. 6.5.4.2) βλέπουμε χαρακτηριστικά τον σχηματισμό μη εντοπισμένων κροσσών συμβολής σε μια περιοχή του χώρου. Οι τελευταίοι προκύπτουν μέσω ενός συμβολόμετρου Michelson το οποίο φωτίζεται στην είσοδό του από μία σημειακή πηγή Laser He-Ne. Στην έξοδο του συμβολόμετρου παρεμβάλλουμε ένα πέτασμα, πάνω στο οποίο σχηματίζονται τμήματα κυκλικών κροσσών. Όμως κροσσοί σχηματίζονται και σ' όλο τον ενδιάμεσο χώρο μεταξύ συμβολόμετρου και πετάσματος. Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται με την παρεμβολή του χεριού μας, πάνω στο οποίο εμφανίζονται οι κροσσοί εκείνης της περιοχής. Η μαθηματική περιγραφή αυτού του πειράματος γίνεται στην (§ 6.4.1- Παράδειγμα 3) και η πειραματική διάταξη μέσω της οποίας πραγματώνεται – όπως προαναφέραμε – είναι το συμβολόμετρο του Michelson (Σχ. 6.6.9).

6.6 *Συμβολόμετρο Michelson*

Ανήκει στα συμβολόμετρα διαίρεσης πλάτους. Αποτελείται (Σχ. 6.6.1α) από ένα διαχωριστή δέσμης Δ του οποίου η πίσω επιφάνεια είναι επικαλυμμένη με ημιδιαφανές μεταλλικό υμένιο, προκειμένου ν' αυξηθεί η ανακλαστικότητά της (§ 6.3.2). Έχει κλίση 45^0 σε σχέση με το επίπεδο μιας εκτεταμένης δευτερεύουσας πη-



(Σχ. 6.6.1)

γής Σ (πλάκα από θαμπόγυαλο), η οποία φωτίζεται με το φως μιας φασματικής λυχνίας Φ. Μετά το διαχωριστή και παράλληλα προς την πηγή Σ βρίσκεται το επίπεδο κάτοπτρο M_1. Ένα δεύτερο κάτοπτρο M_2 σε ορθογώνια θέση με το πρώτο, έχει προσανατολισμό κάθετο προς τη διεύθυνση της ανακλώμενης από το διαχωριστή και έχει τη δυνατότητα της μπρός – πίσω μετακίνησης. Το κάτοπτρο M_1 μπορεί να διευθετηθεί έτσι ώστε σε σχέση με το M_2: α) Να είναι μεταξύ τους ορθογώνια, β) Να βρίσκονται σε κλίση έτσι ώστε μεταξύ τους να σχηματίζουν μια σφήνα, που η ακμή τους να είναι κάθετη προς τη βάση του συμβολόμετρου και γ) Στη γενικότερη περίπτωση, τα επίπεδά τους να έχουν μια τυχαία θέση (να είναι ασύμβατα μεταξύ τους) στο χώρο. Ένα άλλο εξάρτημα του συμβολόμετρου είναι ο αντισταθμιστής C. Είναι από το ίδιο διαφανές υλικό με το διαχωριστή, έχει το ίδιο πάχος και τοποθετείται σε παράλληλη θέση μετά από αυτόν. Η χρησιμότητά του θ' αναφερθεί στα επόμενα.

Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται ο σχηματισμός των κροσσών μέσω του συμβολόμετρου είναι ο εξής: Κατ' αρχή για λόγους απλότητας, θα θεωρήσουμε την

πρόσπτωση στην πρώτη επιφάνεια του διαχωριστή μιας διαταραχής που προέρχεται από την πηγή χωρίς κλίση ως προς την ευθεία που ενώνει διαχωριστή και κάτοπτρο M_1. (Σχ. 6.6.1β). Η τελευταία, μετά την πρόσπτωσή της στην πρώτη επιφάνεια του διαχωριστή κατά τα γνωστά μερικώς ανακλάται (στο σχήμα παριστάνεται με διακεκομμένη γραμμή) σε ποσοστό $\simeq 5\%$. Το υπόλοιπο διαθλάται, προσπίπτοντας στη δεύτερη επιφάνεια του διαχωριστή οποία όμως είναι επικαλυμμένη με το ανακλαστικό μεταλλικό ημιδιαφανές υμένιο. Εδώ ακριβώς είναι που γίνεται ο εξ ίσου διαχωρισμός (συνεχείς γραμμές) της διαθλώμενης σε δύο μέρη: α) Στο τμήμα που ανακλάται στο εσωτερικό του διαχωριστή και διαθλώμενο διαδίδεται κάθετα προς το κάτοπτρο M_2 και β) στο τμήμα που διαθλάται εκτός του υμενίου και διαδίδεται κάθετα προς το κάτοπτρο M_1. Ο εξ ίσου περίπου διαχωρισμός ως προς την ένταση της προσπίπτουσας στο υμένιο, επιτυγχάνεται με κατάλληλο πάχος επίστρωσης. Όσο για την ανακλώμενη δέσμη από την πρώτη επιφάνεια (γυάλινη) του διαχωριστή, δεν λαμβάνεται υπ' όψη στη διαδικασία της συμβολής λόγω της μικρής της τιμής. Χρησιμοποιείται όμως για τη ρύθμιση της καθετότητας των κατόπτρων.

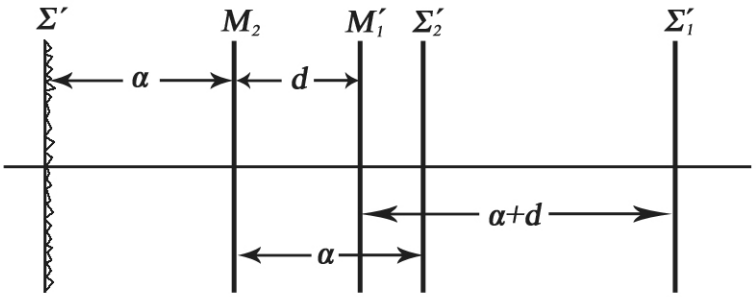
Η διαταραχή μετά την ανάκλασή της στο κάτοπτρο M_2 διαπερνά πάλι τον διαχωριστή και μέσω του υμενίου διαδίδεται προς την έξοδο του συμβολόμετρου. Το άλλο τμήμα της, ανακλώμενο στο κάτοπτρο M_1 (μέσο του αντισταθμιστή) και ξανά ανακλώμενο στην επιφάνεια του υμενίου ακολουθεί παράλληλα την πρώτη προς την έξοδο. Οι δύο διαταραχές, έχοντας όπως θα δούμε στα επόμενα μια διαφορά φάσης μεταξύ τους και εφόσον πληρούνται οι συνθήκες συμφωνίας έχουν τη δυνατότητα να συμβάλλουν. Η κύρια διαφορά δρόμου που επιβάλλεται στις δύο διαταραχές, εξαρτάται από την απόσταση των δύο κατόπτρων M_1, M_2 ως προς τον διαχωριστή, όπου γίνεται και η διαίρεση πλάτους. Όμως εάν δεν υπήρχε ο αντισταθμιστής, η διαταραχή που διαδίδεται στο κλάδο του κατόπτρου M_2 θα διαπερνούσε δύο φορές το πάχος του διαχωριστή σε σχέση με τη διαδιδόμενη διαταραχή στον κλάδο του κατόπτρου M_1. Αυτός ακριβώς είναι και ο λόγος παρεμβολής του ο οποίος τελικά εξισορροπεί τους οπτικούς δρόμους των δύο διαδρομών. Ένας δεύτερος σημαντικός λόγος της ύπαρξής του είναι η αντιστάθμιση (λόγω αμφίδρομης διάνυσής του) της επίδρασης του φαινομένου του διασκεδασμού (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός), όταν για το φωτισμό του συμβολόμετρου χρησιμοποιείται πολυχρωματική πηγή.

Σχηματισμός κροσσών ίσης κλίσης μέσω του συμβολόμετρου του Michelson

Οι κροσσοί αυτού του είδους (βλ. § 6.5.1) δημιουργούνται μέσω του συμβολόμετρου του Michelson, στην περίπτωση που τα κάτοπτρά του M_1, M_2 είναι ορθογώνια μεταξύ τους με δεδομένο τον φωτισμό από εκτεταμένη πηγή ψευδομονοχρωματικού φωτός. Η τελευταία συνθήκη αναφέρεται στην πρόσπτωση στο συμβολόμετρο διαταραχών με διάφορες γωνίες θ ως προς τον άξονα που συνδέει το διαχωριστή με το κάτοπτρο M_1 (Σχ. 6.6.2). Για το λόγο αυτό θα πρέπει να υπολογιστεί η διαφορά δρόμου και κατά προέκταση η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο προκυπτουσών τελικά διαταραχών κατά την έξοδό τους από το συμβολόμετρο. Μέγιστη βοήθεια προς την κατεύθυνση αυτή, μας προφέρει η γεωμετρική ανάπτυξη της διάταξης κατά μήκος μιας ευθείας μέσω του κατοπτρισμού κατ' αρχή της εκτεταμένης πηγής Σ και του κατόπτρου M_1 από το επίπεδο του ημιδιαφανούς υμενίου του διαχωριστή Δ. Τότε η πηγή Σ κατοπτρίζεται στην Σ' και το κάτοπτρο M_1 στη θέση M_1'. Το M_1' μπορεί να εντοπίζεται εμπρός, πίσω ή να ταυτίζεται με το κάτοπτρο M_2 ανάλογα με την απόσταση του τελευταίου από τον διαχωριστή. Βρίσκουμε επίσης τα είδωλα της Σ' (ειδώλου της πηγής Σ) ως προς τα M_2 και M_1', τα οποία καταλαμβάνουν τις θέσεις Σ_2' και Σ_1'. Είναι πολύ εύκολο γεωμετρικά ν' υποδείξουμε ότι αν η απόσταση $M_2M_1' = d$ τότε $\Sigma_2'\Sigma_1' = 2d$.

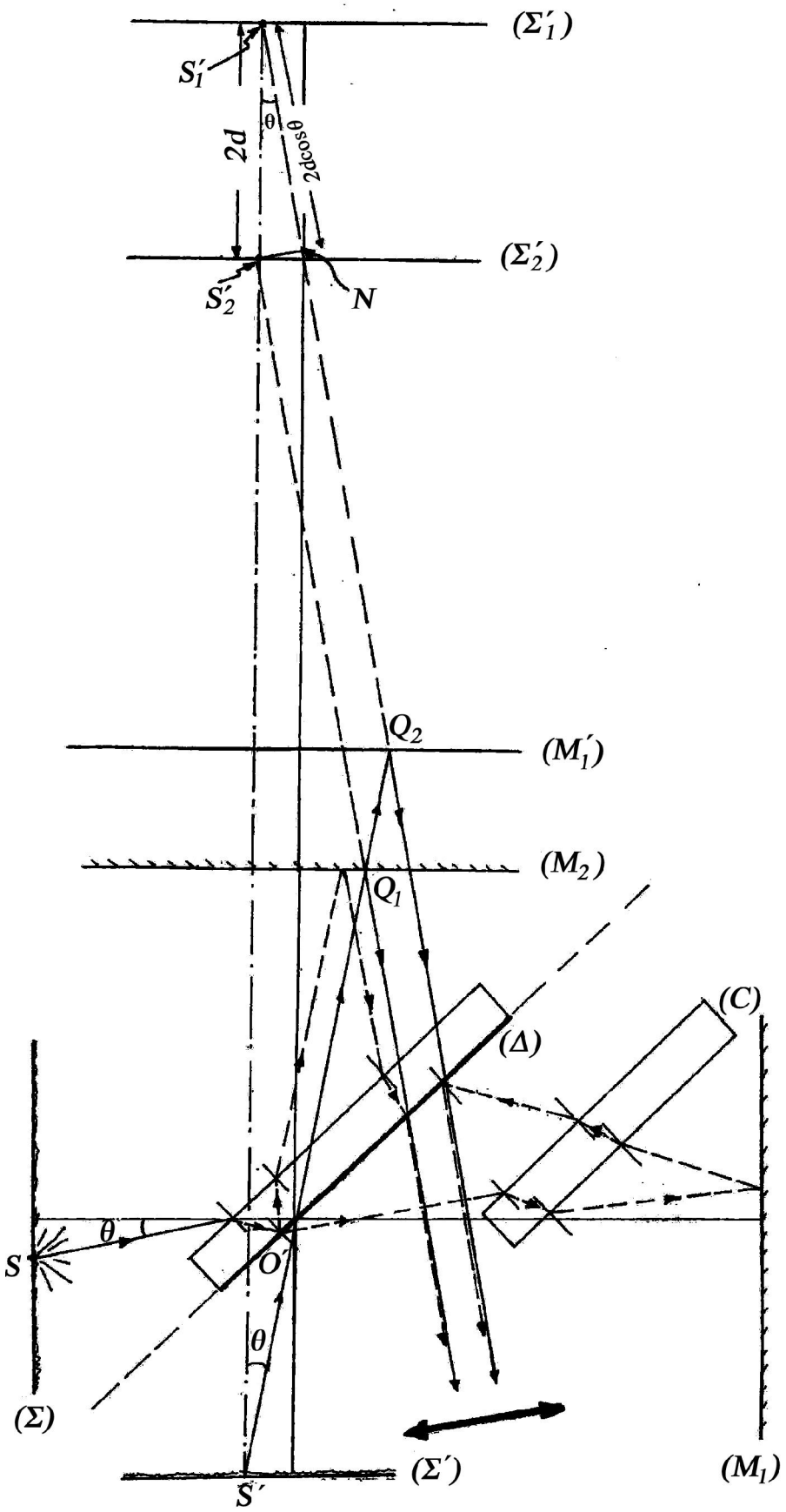
Σημείωση

Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος βρίσκουμε:



$$\Sigma_2'\Sigma_1' = M_1'\Sigma_1' - M_1'\Sigma_2' = (\alpha + d) - (\alpha - d) = 2d .$$

Έστω τώρα ότι μία διαταραχή από τη θέση S της πηγής Σ προσπίπτει με γωνία θ ως προς τον κάθετο άξονα που συνδέει πηγή Σ και κάτοπτρο M_1. Υποθέτουμε επίσης ότι ο άξονας και η διεύθυνση της διαταραχής βρίσκονται στο επίπεδο του (Σχ. 6.6.2) (το επίπεδο που αποτελεί την βάση του συμβολόμετρου), κάθετα



(Σχ. 6.6.2)

στο οποίο βρίσκονται όλα τα οπτικά του στοιχεία. Η διαταραχή που εκκινεί από τη θέση S, διαχωρίζεται στη θέση O' και οι δύο πλέον διαταραχές (διακεκομμένες γραμμές) μετά τις ανακλάσεις τους στα κάτοπτρα M_1 και M_2 εμφανίζονται στην έξοδο του συμβολόμετρου παράλληλα διαδιδόμενες.

Τότε με τη βοήθεια του ματιού μας (προσαρμοσμένου στο άπειρο) ή μέσω ενός θετικού φακού, έρχονται σε επαλληλία (στον αμφιβληστροειδή ή στο εστιακό επίπεδο του φακού αντίστοιχα) και συμβάλλουν με την προϋπόθεση της ύπαρξης συμφωνίας μεταξύ τους. Η ένταση του φωτός στο σημείο της συνάντησής τους, ανάλογα με τη διαφορά φάσης δ που έχουν αποκτήσει θα δίνεται από τη γνωστή (σχ. 6.4.1.10):

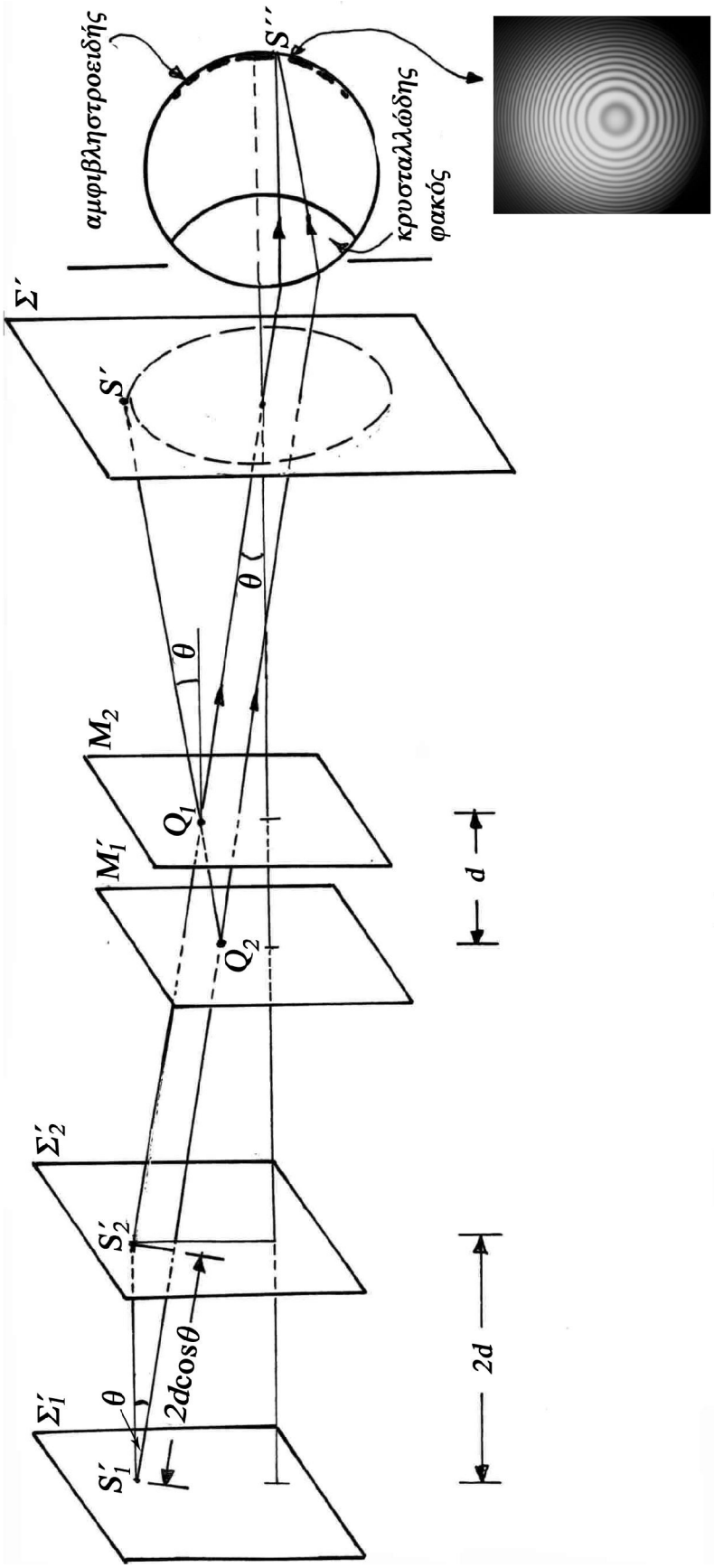
$$I = I_1 + I_1 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta \qquad (6.6.1)$$

όπου I_1, I_1 οι επί μέρους εντάσεις των διαταραχών στο προαναφερόμενο σημείο.

Αντικειμενικός μας σκοπός είναι ο προσδιορισμός της δ και αυτό γίνεται με τη βοήθεια της νοητής γεωμετρικής ανάπτυξης του συμβολόμετρου του Michelson σε μία διεύθυνση. Πράγματι η πορεία της διαταραχής από το σημείο S της πηγής μέσω του πραγματικού συμβολόμετρου, θα είναι αυτή της κατοπτρικής από το S' μέσω του νοητού. Επομένως η διαταραχή από το S', διαδιδόμενη θ' ανακλαστεί (διαχωριζόμενη) από τα M_2 και M_1' στις θέσεις Q_1 και Q_2 και οι δύο διαταραχές (συνεχείς γραμμές) θα εγκαταλείψουν το συμβολόμετρο παράλληλες μεταξύ τους και ταυτιζόμενες με τις διευθύνσεις των διαταραχών όπως αυτές σχεδιάστηκαν κατά την πορεία τους μέσω του πραγματικού συμβολόμετρου. Οι διαταραχές όμως από τα Q_1 και Q_2 φαίνεται σαν να προέρχονται από τα σημεία S_2' και S_1' που είναι τα κατοπτρικά της S' ως προς τα M_2 και M_1'. Είναι όμως $S_1'S_2' = 2M_2M_1' = 2d$ και επειδή οι S_1', S_2' αποτελούν τις δύο φανταστικές πηγές από τις οποίες προέρχονται οι συμβάλλουσες διαταραχές ($S'Q_1 = S_2'Q_1$ και $S'Q_2 = S_1'Q_2$), τότε η κάθετος από την S_2' στην $S_1'Q_2$, δηλ. το τμήμα $S_1'N$ θα είναι η διαφορά του οπτικού δρόμου μεταξύ τους. Επομένως με βάση τα προαναφερόμενα θα έχουμε:

$$\delta = k\left(S_1'N\right) = k2d\cos\theta = \frac{4\pi d}{\lambda}\cos\theta \qquad (6.6.2)$$

Όμως η ανακλώμενη στο υμένιο του διαχωριστή και προερχόμενη από την ανακλώμενη στο κάτοπτρο M_1 ανακλάται από οπτικά αραιότερο μέσο σε οπτικά πυκνότερο. Οπότε θα έχουμε μια πρόσθετη διαφορά φάσης που υποθέτουμε κατά


αμφιβληστροειδής
S´´
κρυσταλλώδης φακός
Σ´
S´
θ
θ
M2
Q1
M1´
Q2
d
Σ2´
S2´
2dcosθ
Σ1´
θ
S1´
2d

(Σχ. 6.6.3)

προσέγγιση ότι είναι $\pm 180^0$, ενώ οι επί πλέον φάσεις κατά τις ανακλάσεις των δύο διαταραχών στα M_1, M_2 αντισταθμίζονται μεταξύ τους. Επομένως η τελική διαφορά φάσης δ μεταξύ των δύο διαταραχών θα είναι:

$$\delta = \frac{4\pi d \cos\theta}{\lambda} \pm \pi \tag{6.6.3}$$

η οποία είναι πανομοιότυπη με αυτήν που μας δίνει η (σχ. 6.5.1.4) και που υπολογίζεται από πλακίδιο παραλλήλων εδρών πάχους d. Για την περίπτωσή μας, επειδή το 'πλακίδιο' είναι από αέρα (το πάχος του d είναι η διαφορά των αποστάσεων M_1 και M_2 από το διαχωριστή) $n_f \simeq 1.0$ και $\theta_t \simeq \theta$. Επομένως οι συνθήκες μεγίστων και ελαχίστων για διάφορες τιμές θ της γωνίας πρόσπτωσης των διαταραχών θα δίνονται από τις (σχ. 6.5.1.5, 6):

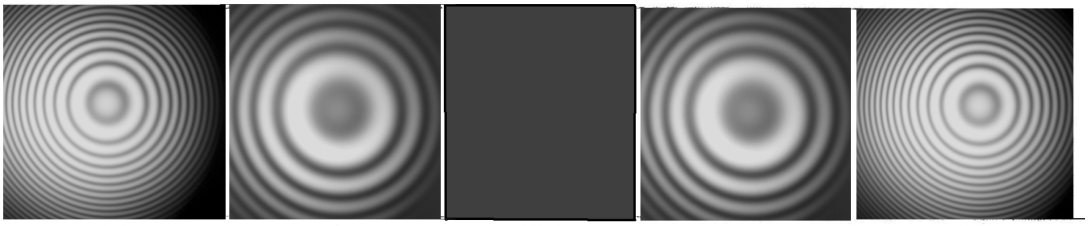
$$\max: \qquad 2d\cos\theta_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_o \quad m = 0,1,2... \tag{6.6.4}$$

$$\min: \qquad 2d\cos\theta_m = m\lambda_o \quad m = 0,1,2... \tag{6.6.5}$$

Από τα προηγούμενα γίνεται κατανοητό ότι στην περίπτωση που τα κάτοπτρα του συμβολόμετρου είναι ορθογώνια μεταξύ τους και το ίδιο φωτίζεται μ' εκτεταμένη πηγή, οι σχηματιζόμενοι κροσσοί είναι κροσσοί ίσης κλίσης δηλ. θα έχουν κυκλική συμμετρία (Εικ. 6.6.4α). Αν επίσης φωτίσουμε το συμβολόμετρο με σχεδόν κάθετο φωτισμό τότε ομιλούμε για κροσσούς Haidinger. Ένα διευκρινιστικό διάγραμμα του τρόπου σχηματισμού των κροσσών είναι αυτό του (Σχ. 6.6.3). Έστω μια σημειακή πηγή S' της εκτεταμένης Σ' (ειδώλου της Σ) εκπέμπει μια διαταραχή στη διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα του συμβολόμετρου και βρίσκεται πάνω στο επίπεδο του σχεδίου. Η πηγή Σ' βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο ως προς τον άξονα όπως και τα στοιχεία M_2, M_1', Σ_2', Σ_1'. Κατά μήκος του άξονα στην έξοδο του συμβολόμετρου παρεμβάλλουμε το μάτι μας. Τότε οι δύο προκύπτουσες διαταραχές που φαινομενικά προέρχονται από τις σημειακές πηγές S_1', S_2' οδεύουν παράλληλα και συγκεντρώνονται από τον κρυσταλλώδη φακό του ματιού μας (προσαρμοσμένου στο άπειρο) στον αμφιβληστροειδή όπου και συμβάλλουν στο σημείο S'' το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο του σχήματος. Στο ίδιο ακριβώς επίπεδο βρίσκονται και τα σημεία Q_1, Q_2, S_1', S_2'. Έστω τώρα ότι η σημειακή πηγή S' (της Σ) διαγράφει κύκλο με κέντρο το σημείο της τομής της Σ' με τον άξονα του συμβολόμετρου. Τότε γίνεται εύκολα κατανοητό ότι τ' αντίστοιχα σημεία S'' που χαρα-

κτηρίζονται από μια καθορισμένη ένταση του προτύπου συμβολής, θα διαγράψουν και αυτά κύκλο στη θέση του αμφιβληστροειδή. Επομένως το πρότυπο συμβολής μέσω του συμβολόμετρου του Michelson θα είναι κυκλικής συμμετρίας για την περίπτωση που τα κάτοπτρα M_1, M_2 είναι σε ορθογώνια θέση μεταξύ τους.. Τέλος θα πρέπει να επαναλάβουμε ότι αν στην προαναφερόμενη διάταξη η συμβολή λαμβάνει χώρα στον αμφιβληστροειδή του ματιού μας, το πρότυπο συμβολής φαίνεται να βρίσκεται στο χώρο του κατόπτρου M_2. Το γεγονός οφείλεται στο ότι το μάτι μας βλέπει κατά την προέκταση των συμβαλλουσών διαταραχών.

Γνωρίζουμε (σχ. 6.6.5), ότι η συνθήκη για το σχηματισμό του m τάξης σκοτεινού κροσσού δίνεται από τη σχέση $2d\cos\theta_m = m\lambda \quad m = 0,1,2,.....$ Αν τώρα υποθέσουμε ότι το κάτοπτρο M_2 κινείται προς το M_1', η απόσταση d μεταξύ τους θα ελαττώνεται και επειδή το δεύτερο μέλος της τελευταίας σχέσης παραμένει σταθερό, τότε θ' αυξάνεται το $\cos\theta_m$. Δηλ. τελικά θα ελαττώνεται η γωνία θ_m με την οποία φαίνεται ο m τάξης σκοτεινός κροσσός. Οι κροσσοί του προτύπου συμβολής θα κινούνται από το κέντρο προς την περιφέρεια εξαφανιζόμενοι διαδοχικά. Έτσι καθώς ελαττώνεται η απόσταση d, θα ελαττώνεται και ο αριθμός των κροσσών που φαίνονται στο πεδίο (Εικ. 6.6.4α→β) συγχρόνως όμως θ' αυξάνεται το μεσοδιάστημα μεταξύ τους (βλ. (§ 6.5.1) Παράδειγμα 1). Στη θέση όπου τα M_2 και M_1' ταυτίζονται (δηλ. $d = 0$), όλο το πεδίο όρασης θα καλύπτεται από ένα σκοτεινό κροσσό



(α) *(β)* *(γ)* *(δ)* *(ε)*

(Εικ. 6.6.4)

(λόγω της διαφοράς φάσης των 180^0 μεταξύ των συμβαλλουσών διαταραχών) (Εικ. 6.6.4γ). Εάν στη συνέχεια το M_2 απομακρύνεται από το M_1', στο επίπεδο παρατήρησης θα αρχίσουν να εμφανίζονται κροσσοί κινούμενοι από την περιφέρεια προς το κέντρο του προτύπου συμβολής και το μεσοδιάστημα μεταξύ τους θα ελαττώνεται όσο μεγαλύτερη θα γίνεται η απόσταση d (Εικ. 6.6.4 δ→ε).

Για το κέντρο του προτύπου συμβολής όπου $\theta_m = 0 \Rightarrow \cos\theta_m = 1$, άρα $2d = m\lambda$. Οπότε για δύο θέσεις του κατόπτρου M_2 με τις οποίες επιτυγχάνουμε τη διέλευση ενός μόνο κροσσού συμβολής $\Delta m = 1$ οπότε $2\Delta d = \lambda$ και $\Delta d = \lambda/2$. Δηλ. η

διαδοχική εμφάνιση ή εξαφάνιση ενός κροσσού συμβολής από το κέντρο του προτύπου σημαίνει μετακίνηση του κατόπτρου M_2 κατά $\lambda/2$. Στο γεγονός αυτό οφείλεται και η μεγάλη ακρίβεια των μετρήσεων που γίνονται με το συμβολόμετρο Michelson. Ο ίδιος ταυτοποίησε το ***πρότυπο μέτρο (*1m*)***, το οποίο βρίσκεται στις Sévres του Παρισιού, με τη βοήθεια της 'κόκκινης' γραμμής της φασματικής λυχνίας του Cd $\left(\lambda = 643.847\text{nm},\ \Delta\lambda \simeq 0.0013\text{nm}\right)$. Μέσω του συμβολόμετρου του και με κατάλληλο μηχανισμό μέτρησης, βρήκε ότι το 1m αντιστοιχεί ακριβώς σε 3.106.327 διαβάσεις κροσσών από το κέντρο του προτύπου συμβολής. Δεδομένου ότι κάθε διάβαση κροσσού αντιστοιχεί σε $\Delta d = \lambda/2$ τότε το μήκος του προτύπου μέτρου θα είναι $3.106.327 \times 643.847/2 = 0.9999996\text{m}$. Ο επαναπροσδιορισμός του μέτρου έγινε το 1960 με τη βοήθεια της 'κίτρινης' γραμμής του ^{86}Kr ($\lambda = 587.0915\text{nm}$).

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η κατανομή της έντασης του προτύπου συμβολής, για την περίπτωση σχηματισμού κροσσών Haidinger από το συμβολόμετρο του Michelson. Το συμβολόμετρο φωτίζεται με εκτεταμένη πηγή και με σχεδόν κάθετο φωτισμό.

- Συμβολή θα έχουμε στην πραγματικότητα από τις δύο διαταραχές με πλάτη E_{1r}, E_{2r} που προέρχονται φαινομενικά από τις δύο φανταστικές πηγές S_1', S_2' (βλ. Σχ. 6.5.1.3 και 6.6.2) με ίδιες αρχικές φάσεις $\phi_1 = \phi_2$. Επομένως η κατανομή της έντασης θα δίνεται από τη γνωστή (σχ. 6.4.1.10).

$$I = I_1 + I_1 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left[\delta + \left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right] \tag{6.6.6}$$

Επειδή όμως $E_{1r} = E_{2r} \Rightarrow I_1 = I_2 = I_0$ και $\phi_1 = \phi_2 = 0$ τελικά:

$$I = 2I_0\left(1 + \cos\delta\right) = 4I_0\cos^2\left(\delta/2\right) \tag{6.6.7}$$

Όπου $$\delta = \frac{4\pi d}{\lambda_0}\cos\theta - \pi \quad \left(n_f \simeq 1.0\right) \tag{6.6.8}$$

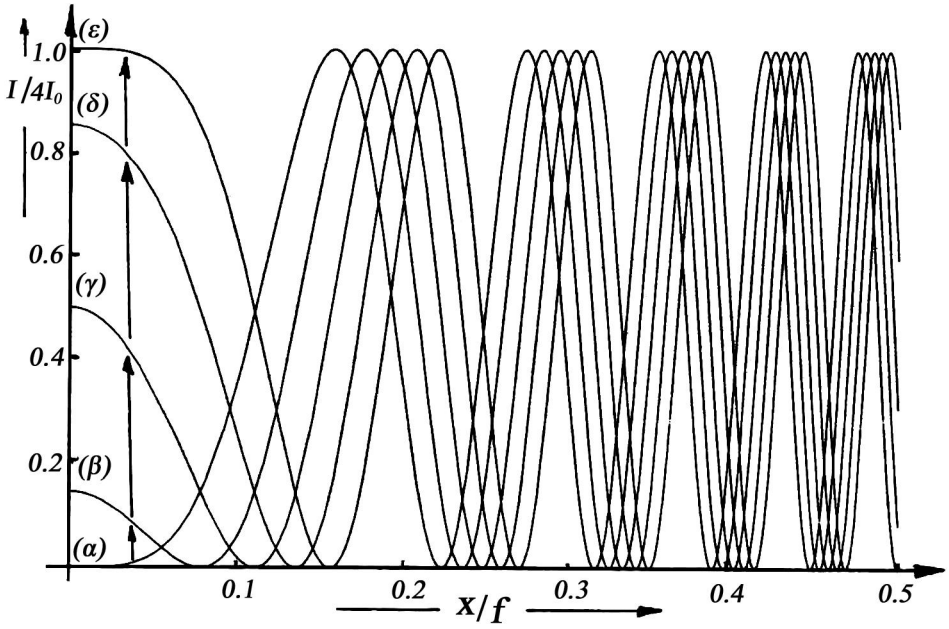
Λόγω επίσης του σχεδόν κάθετου φωτισμού, $\theta \ll$ οπότε: $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$ και τελικά η (σχ. 6.6.7) γίνεται:

$$\frac{I}{4I_o} = \cos^2\left[\frac{2\pi d\left(1 - \theta^2/2\right)}{\lambda_o} - \frac{\pi}{2}\right] \tag{6.6.9}$$

Οι ακτίνες x των σχηματιζόμενων κροσσών συμβολής στο πίσω εστιακό επίπεδο του φακού εστιακής απόστασης f, που συλλέγει τις παράλληλα εξερχόμενες από το συμβολόμετρο διαταραχές, προκειμένου οι τελευταίες να οδηγηθούν προς συμβολή (βλ. (§ 6.5.1) Παράδειγμα 1), θα δίνονται από τη σχέση: $\tan\theta \simeq \theta = x/f$. Επομένως η (σχ. 6.6.9) γίνεται:

$$\frac{I}{4I_o} = \cos^2\left\{\frac{2\pi\, d}{\lambda_o}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{f}\right)^2\right]-\frac{\pi}{2}\right\} \tag{6.6.10}$$

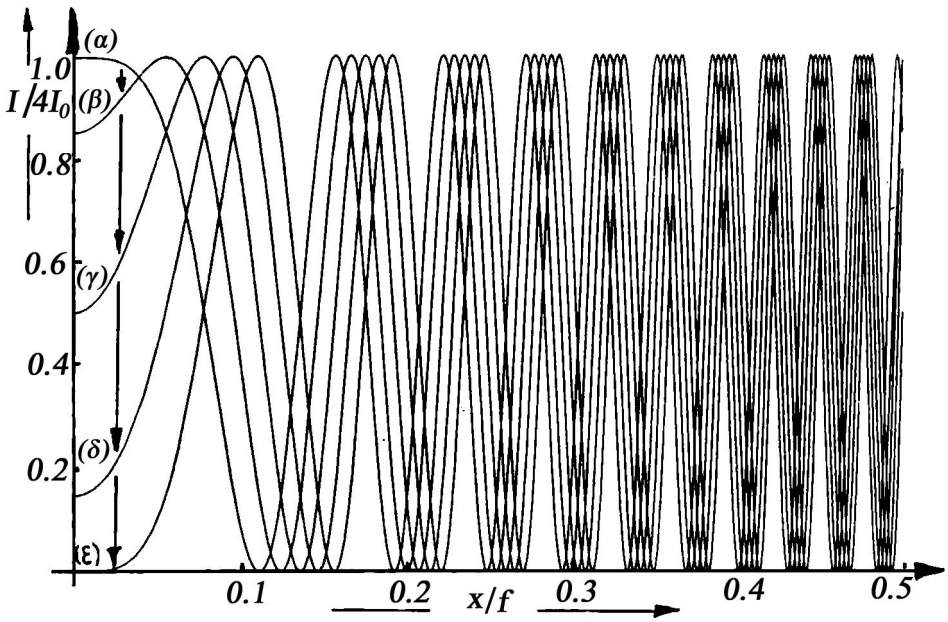
Στο (Σχ. 6.6.5) δίνεται η γραφική παράσταση της $I/4I_o$ συναρτήσει του x/f για την περίπτωση όπου: α) $d = 10\lambda_0$ και επειδή min: $2d = m\lambda_0$ τότε $m = 20$, δηλ. στο



(Σχ. 6.6.5)

κέντρο του προτύπου συμβολής θα εμφανίζεται ο τάξης $m = 20$ σκοτεινός κροσσός. β) $d = 10\lambda_0 + \lambda_0/16$ γ) $d = 10\lambda_0 + \lambda_0/8$ δ) $d = 10\lambda_0 + 3\lambda_0/16$ ε) $d = 10\lambda_0 + \lambda_0/4$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να παρακολουθήσουμε την μετακίνηση του τάξης $m = 20$ σκοτεινού κροσσού από το κέντρο προς την περιφέρεια του προτύπου συμβολής καθώς μεταβάλλεται η απόσταση d μεταξύ των κατόπτρων (στο προαναφερόμενο σχήμα εμφανίζονται πέντε στάδια εξέλιξης του φαινομένου). Επίσης στο (Σχ. 6.6.6) δίνεται η γραφική παράσταση της $I/4I_o$ συναρτήσει του x/f για την περίπτωση όπου: α) $d = 20\lambda_0 + \lambda_0/4$ που αντιστοιχεί $\left(\max:\ 2d = (m+1/2)\lambda_0\right)$ στον τάξης

$m = 40$ φωτεινό κροσσό στο κέντρο του προτύπου συμβολής. β) $d = 20\lambda_0 + 5\lambda_0/16$ γ) $d = 20\lambda_0 + 3\lambda_0/8$ δ) $d = 20\lambda_0 + 7\lambda_0/16$ και ε) $d = 20\lambda_0 + \lambda_0/2$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να παρακολουθήσουμε τη μετακίνηση του τάξης $m = 40$ φωτεινού κροσσού από το κέντρο του προτύπου προς την περιφέρεια.

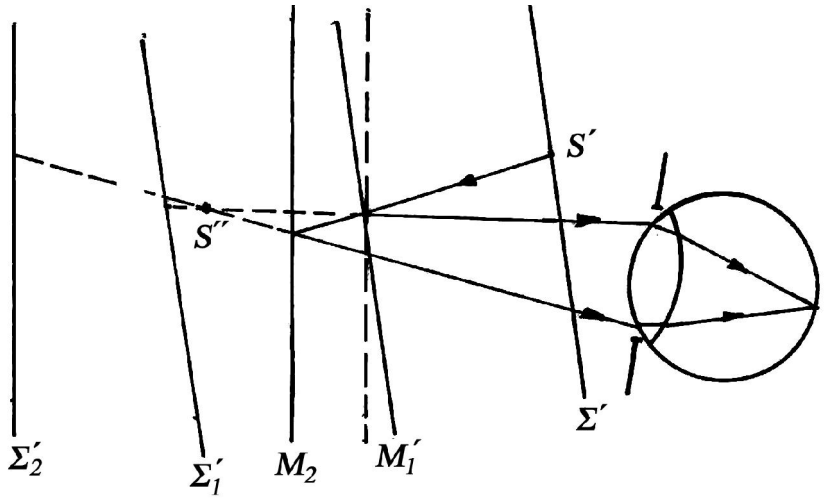


(Σχ. 6.6.6)

Σχηματισμός κροσσών ίσου πάχους μέσω του συμβολόμετρου του Michelson

Κροσσούς τέτοιου είδους παίρνουμε όταν ένα από τα κάτοπτρα (έστω το M_2) λάβει κάποια κλίση ως προς το M_1 όπως φαίνεται νοητά αναπτυγμένο στο (Σχ. 6.6.7). Τότε ο χώρος μεταξύ των M_2, M_1' είναι μία σφήνα από αέρα. Όταν το πάχος της είναι τέτοιο ώστε να πληρούνται οι συνθήκες συμφωνίας, θα έχουμε φαινόμενα συμβολής. Αν υποθέσουμε ότι μια διαταραχή από τη στοιχειώδη πηγή S' της εκτεταμένης Σ' (ειδώλου της Σ) προσπίπτει σ' ένα σημείο του M_1', τότε από την πρώτη ανάκλαση (στο M_1') και από την ανάκλαση στο M_2 (κατόπιν διαίρεσης πλάτους), θα προκύψουν δύο διαταραχές, οι οποίες με μια σχετική απόκλιση εξέρχονται από το συμβολόμετρο. Βλέπουμε να προέρχονται φαινομενικά από το φανταστικό σημείο σύγκλισης S'' που βρίσκεται σχετικά κοντά στα κάτοπτρα. Θα πρέπει να επαναλάβουμε ότι η επαλληλία των διαταραχών λαμβάνει χώρα στον αμφιβληστροειδή του ματιού μας (ή στο επίπεδο απεικόνισης ενός συγκλίνοντος μέσου). Δηλ. η περιοχή των σημείων S'' (όπου φαινομενικά βλέπουμε να σχηματί-

ζονται οι κροσσοί) αποτελεί συζυγές επίπεδο απεικόνισης (αντικείμενο) του αμφιβληστροειδή (είδωλο) μέσω του κρυσταλλώδους φακού του ματιού μας. Η διαδικασία σχηματισμού των κροσσών από τη σφήνα αέρα μεταξύ των M_2, M_1', ακολουθεί γενικά τη λογική που εξετάσθηκε στην (§ 6.5.2). Για σχεδόν κάθετο φωτισμό της σφήνας και εφόσον αυτή είναι λεπτή, σχηματίζονται εντοπισμένοι στην περιοχή της σφήνας ευθύγραμμοι κροσσοί συμβολής παράλληλοι προς την ακμή της. Το γεγονός οφείλεται στο ότι η διαφορά των οπτικών δρόμων σε σημεία με διευθύνσεις παράλληλες με την ακμή της σφήνας είναι σταθερά (σταθερό πάχος). Στην πραγματικότητα όμως δεν συμβαίνει ακριβώς το ίδιο αν το πάχος της σφήνας είναι



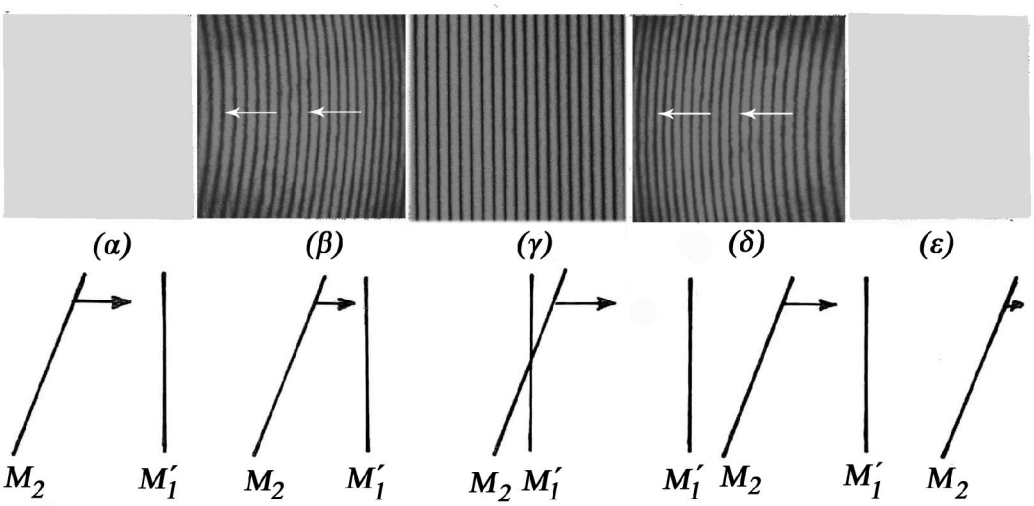
(Σχ. 6.6.7)

σημαντικό. Τότε η διαφορά του οπτικού δρόμου μεταξύ των συμβαλλουσών διαταραχών εξαρτάται εκτός από το πάχος της σφήνας και από τη γωνία πρόσπτωσης της αρχικής διαταραχής. Αυτό θα έχει σαν συνέπεια, οι εντοπισμένοι κροσσοί συμβολής να είναι καμπύλοι με το κυρτό τους μέρος στραμμένο προς το λεπτό τμήμα της ακμής της σφήνας.

Ας υποθέσουμε ότι τα κάτοπτρα M_2, M_1' έχουν τη διευθέτηση που φαίνεται στο κάτω μέρος της (Εικ. 6.6.8) και ότι το M_2 πλησιάζει το M_1'. Τότε οι καμπύλοι κροσσοί θα κινούνται προς τα αριστερά και κατά τα γνωστά για κάθε μετατόπιση κατά $\Delta d = \lambda/2$ θα έχουμε και τη διάβαση ενός κροσσού από το κέντρο καμπυλότητας. Στη θέση που τα κάτοπτρα θα διασταυρωθούν (Εικ. 6.6.8γ), το πάχος της σφήνας γίνεται πολύ μικρό με συνέπεια η συνεισφορά στη διαφορά οπτικού δρόμου λόγω της γωνίας πρόσπτωσης να υποβαθμίζεται. Τότε οι σχηματιζόμενοι κροσσοί είναι αμιγείς ίσου πάχους οπότε και ευθύγραμμοι. Αν τέλος το κάτοπτρο M_2 απομακρύνεται από το M_1' (Εικ. 6.6.8δ), οι κροσσοί που θα λάβουν πάλι καμπύλη μορφή,

θα κινούνται προς τα αριστερά απομακρυνόμενοι όμως από το κέντρο καμπυλότητάς τους.

Στις (Εικ.6.6.8α,ε) φαίνεται ότι ο φωτισμός του πεδίου όρασης του συμβολόμετρου είναι ομογενείς. Πράγματι αν το φως το οποίο εκπέμπει η πηγή Σ είναι ψευδομονοχρωματικό και τα κάτοπτρα M_2, M_1' είναι πολύ απομακρυσμένα μεταξύ τους, τότε λόγω του μεγάλου πάχους της σφήνας αέρα δεν πληρούνται οι συνθήκες συμφωνίας μεταξύ των διαταραχών που έρχονται σε επαλληλία. Οπότε δεν θα παρατηρούνται φαινόμενα συμβολής με συνέπεια το πεδίο όρασης να είναι ομοιογενώς φωτισμένο (πρόσθεση εντάσεων).



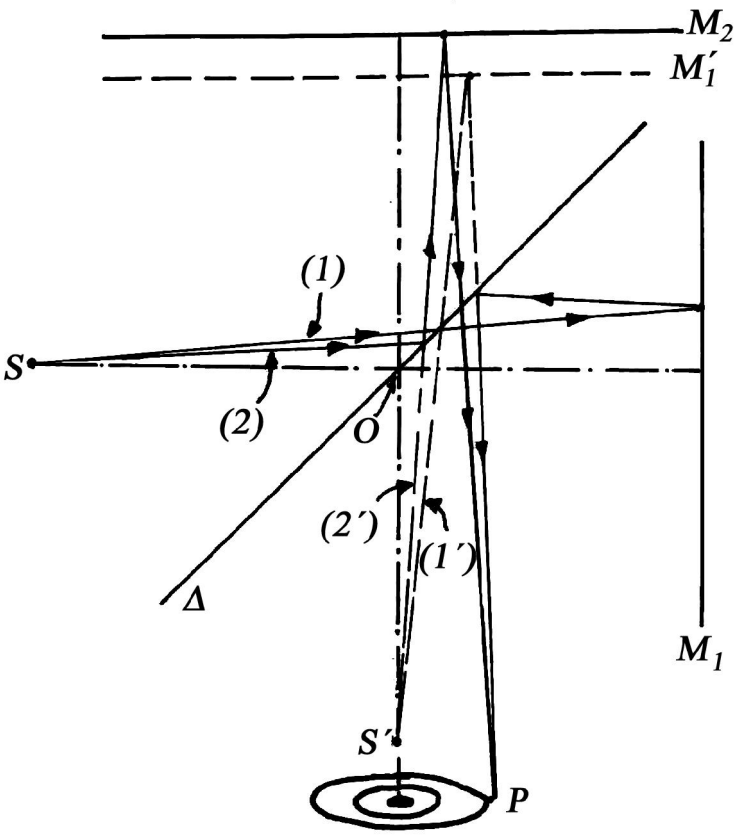
(Σχ. 6.6.8)

Μη εντοπισμένοι πραγματικοί κροσσοί συμβολής μέσω του συμβολόμετρου του Michelson

Μέχρις εδώ, έχουμε μελετήσει δύο περιπτώσεις σχηματισμού εντοπισμένων κροσσών συμβολής μέσω του συμβολόμετρου του Michelson όταν το τελευταίο φωτίζεται με κατάλληλο τρόπο από εκτεταμένη επίπεδη πηγή. Τότε: α) Όταν τα κάτοπτρά του είναι ορθογώνια μεταξύ τους, έχουμε τη δημιουργία εντοπισμένων σε άπειρη απόσταση (ή στην εστιακή απόσταση συγκλίνοντος συστήματος) κροσσών ίσης κλίσης και β) Όταν τα κάτοπτρά του παρουσιάζουν μικρή κλίση μεταξύ τους, εμφανίζονται εντοπισμένοι κροσσοί ίσου πάχους που σχηματίζονται στην περιοχή της σφήνας.

Θεωρούμε τώρα ότι κατ' αρχή τα κάτοπτρά του είναι ορθογώνια μεταξύ τους αλλά το συμβολόμετρο φωτίζεται από μία μόνο σημειακή πηγή όπως φαίνεται στο (Σχ. 6.6.9). Στην προκειμένη περίπτωση θα υπάρχουν πάντοτε δύο διαταραχές (διευθύνσεις (1) και (2)) προερχόμενες από την πηγή S, οι οποίες ανακλώμενες αντί-

στοιχα από τα κάτοπτρα M_1 και M_2 (τα οποία απέχουν μεταξύ τους μια ορισμένη απόσταση d), κατά την έξοδό τους από το συμβολόμετρο θα συμβάλλουν σ' ένα σημείο P, με την προϋπόθεση ότι πληρούται γι' αυτές η συνθήκη συμφωνίας. Θα ήταν ισοδύναμο να λέγαμε ότι οι συμβάλλουσες διαταραχές προέρχονται από τις ανακλάσεις (1΄) και (2΄) από τα M_2 και M_1', όπου το τελευταίο είναι το είδωλο του M_1 ως προς τον διαχωριστή Δ και οι (1΄) ,(2΄) είναι οι διευθύνσεις των προσπιπτουσών διαταραχών από τη φανταστική πηγή S' ειδώλου της S ως προς τον δια-



(Σχ. 6.6.9)

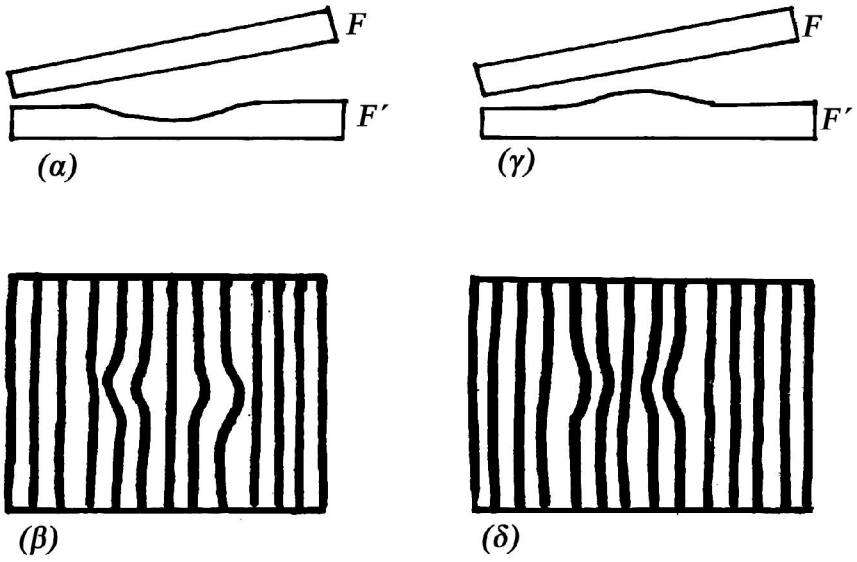
χωριστή Δ. Η προαναφερόμενη διαδικασία είναι απ' ευθείας συγκρίσιμη με τον τρόπο σχηματισμού μη εντοπισμένων πραγματικών κροσσών συμβολής μέσω του συμβολόμετρου του Pohl (§ 6.5.4). Στην προκειμένη βέβαια περίπτωση η ανάκλαση των δύο διαταραχών των προερχομένων από τη σημειακή πηγή S, γίνεται μέσω του φανταστικού πλακιδίου από αέρα μεταξύ των M_2, M_1' για το οποίο βέβαια $n_f \simeq 1.0$. Οι κροσσοί αυτού του είδους είναι κυκλικής συμμετρίας, με κέντρο πάνω στη διεύθυνση που ορίζει ο άξονας OS' και σε επίπεδο κάθετο σ' αυτόν το οποίο περιλαμβάνει το σημείο P. Πρότυπα συμβολής αυτού του είδους εμφανίζονται σ' όλο το χώρο (μη εντοπισμένοι κροσσοί συμβολής) καθώς μετακινούμε ένα πέτασμα

στη διεύθυνση OS' εφόσον φυσικά πληρούνται οι συνθήκες χρονικής συμφωνίας για το εκπεμπόμενο φως από την πηγή S.

6.7 *Παραδείγματα εφαρμογών από τη συμβολομετρία*

6.7.1 *Εντοπισμός και μετρήσεις των κοιλωμάτων και εξογκωμάτων μικρής κλίμακας σε μια επιφάνεια*

Στην προκειμένη περίπτωση στο πάνω μέρος της προς μελέτη επιφάνειας, τοποθετούμε ένα επίπεδο διαφανές πλακίδιο F – συνήθως οπτικά επίπεδο – (Σχ. 6.7.1.1α,γ), του οποίου δηλαδή οι επιφάνειες να μην εμφανίζουν κανενός είδους ανωμαλία. Πλακίδιο και επιφάνεια σχηματίζου σφήνα. Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση για την οποία η κάτω επιφάνεια F' της σφήνας παρουσιάζει ένα στοιχειώδες κοίλωμα (Σχ. 6.7.1.1α). Τότε στο πεδίο όρασης του συμβολόμετρου θα



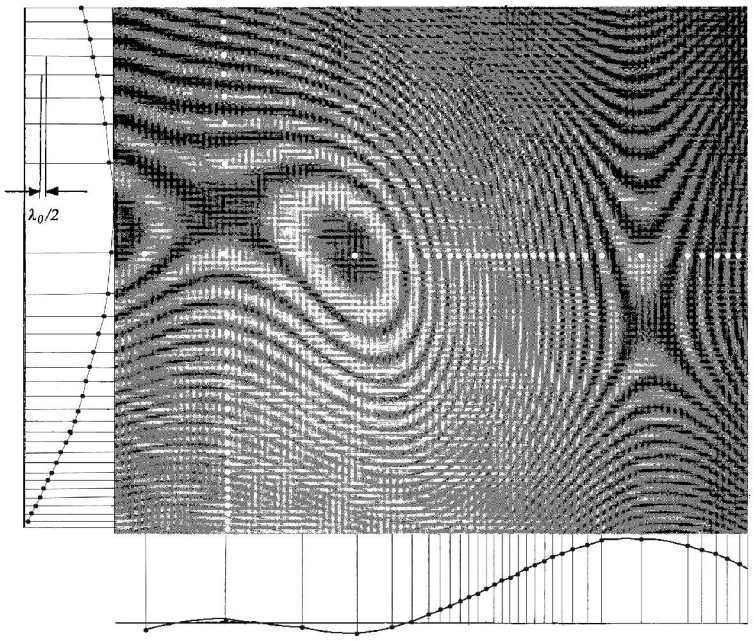
(Σχ. 6.7.1.1)

δούμε την (Εικ. 6.7.1.1β) όπου παρατηρούμε μια τοπική παραμόρφωση των κροσσών συμβολής. Το γεγονός εξηγείται ως εξής. Διανύοντας τη σφήνα από την κορυφή της μέχρις τα όρια του κοιλώματος, η γωνία της είναι σταθερή και ίση με α, όπως βέβαια και στην περιοχή εκτός της ανωμαλίας. Ας υποθέσουμε ότι από την άκρη της κοιλότητας περνάει ο σκοτεινός κροσσός τάξης m. Τότε κατά τα γνωστά θα ισχύει η σχέση:

$$2x_m a = m\lambda_0 \qquad (6.7.1.1)$$

Όμως σταδιακά (προς το εσωτερικό της κοιλότητας) η γωνία της σφήνας αρχίζει ν' αυξάνεται. Προκειμένου όμως το γινόμενο $m\lambda_0$ να παραμείνει σταθερό για τον προαναφερόμενο m τάξης σκοτεινό κροσσό, θα πρέπει η απόστασή του x_m από την ακμή της σφήνας να ελαττώνεται. Άρα ο κροσσός θα μετατοπιστεί τοπικά προς την διεύθυνση της ακμής της. Στον πυθμένα του κοιλώματος η κλίση της σφήνας είναι ίση περίπου προς την αρχική. Για το λόγο αυτό ο κροσσός ή οι κροσσοί (ανάλογα του πλάτους του πυθμένα) ευθυγραμμίζονται με τους αρχικούς. Συνεχίζοντας για την έξοδο από το κοίλωμα η κλίση της σφήνας γίνεται πάλι μεγαλύτερη της αρχικής μόνο που τώρα η ακμή της μετατοπίζεται (νοητά) δεξιά. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα – με βάση ακριβώς την ίδια λογική στην οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως – οι κροσσοί να μετατοπίζονται μετωπικά προς τα δεξιά όπου και η ακμή της σφήνας (και πάλι ελάττωση της x_m) . Μετά την έξοδο από το κοίλωμα οι κροσσοί και πάλι ευθυγραμμίζονται. Στο (Σχ. 6.7.1.1δ) βλέπουμε το πρότυπο συμβολής για την περίπτωση που αντί για κοίλωμα έχουμε εξόγκωμα (Σχ. 6.7.1.1γ).

Θα πρέπει οπωσδήποτε να σημειώσουμε ότι η προηγούμενη ανάλυση αναφέρεται σε μονοδιάστατες ανωμαλίες της επιπεδότητας μιας επιφάνειας γεγονός



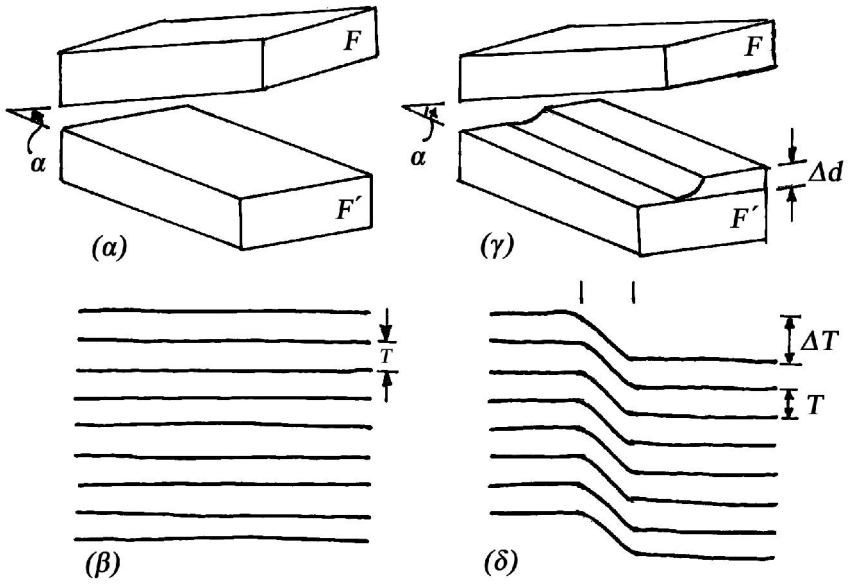
(Σχ. 6.7.1.2)

που αποτελεί εξιδανίκευση. Οι παραμορφώσεις π.χ. ενός πλακιδίου αφορούν τις δύο του διαστάσεις και το συμβολογράφημά του μέσω ενός συμβολόμετρου αποτελεί ένα άριστο 'τοπογραφικό' διάγραμμα των ανωμαλιών που θα μπορούσε να εμφανίσει. Η (Εικ. 6.7.1.2) χαρακτηρίζει μια τέτοια κατάσταση. Με τη βοήθεια των

ισοϋψών των φωτεινών κροσσών, μπορούμε να περιγράψουμε τις σχετικές μεταβολές των παραμορφώσεων για δύο π.χ. κάθετες διευθύνσεις στο εσωτερικό του πλακιδίου. Για να γίνουν απόλυτες μετρήσεις θα πρέπει να ξεκινήσουμε τη διαγραφή από ένα κροσσό αναφοράς για τον οποίο θα είναι $d = 0$.

6.7.2 *Μέτρηση πάχους λεπτού υμενίου*

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση την οποία θα μελετήσουμε στα επόμενα, αφορά τον υπολογισμό του πάχους λεπτού υμενίου. Έστω λοιπόν ότι στην προς εξέταση επιφάνεια F' (Σχ. 6.7.2.1γ) και πιο συγκεκριμένα σ' ένα τμήμα της έχει εναποτεθεί (π.χ. με εξάχνωση) ένα λεπτό ισοπαχές στρώμα υλικού πάχους Δd. Το τελευταίο, ουσιαστικά ελαττώνει το διάκενο της σφήνας μεταξύ των F και F' χωρίς όμως να αλλάζει τη γωνία της α. Στο πεδίο όρασης του συμβολόμετρου αν δεν υπήρχε υμένιο (Σχ. 6.7.2.1α), θα παρατηρήσουμε το γνωστό πρότυπο συμβολής της (Εικ. 6.7.2.1β) των ευθυγράμμων κροσσών μιας περιόδου παραλλήλων με την ακμή της. Στην περίπτωση όμως ύπαρξης τμήματος υμενίου, θα δούμε (Εικ. 6.7.2.1δ) ότι

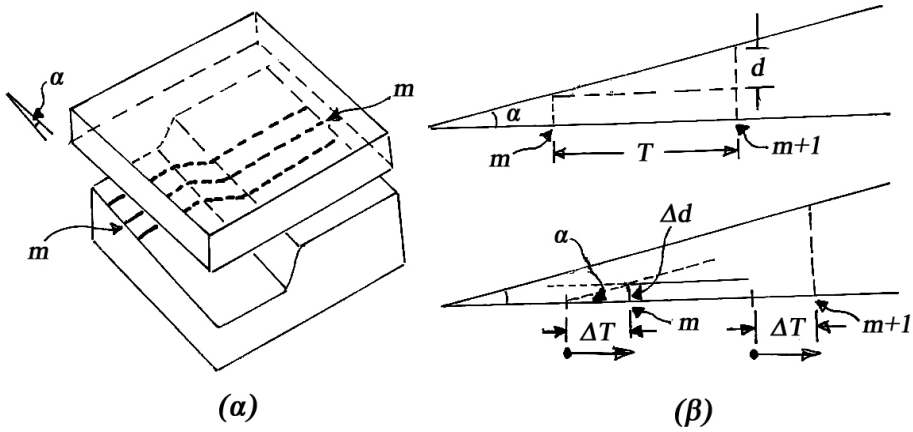


(Σχ. 6.7.2.1)

το πρότυπο των κροσσών συμβολής στην περιοχή των ορίων της εναπόθεσης κάμπτεται και μετατοπίζεται κατά ΔT με φορά αντίθετη προς την ακμή της σφήνας διατηρώντας όμως την συνέχεια των κροσσών. Το συγκεκριμένο γεγονός οφείλεται στο ότι ένας οποιοσδήποτε κροσσός τάξης m κατά τη μετάβασή του από τη μία στην άλλη περιοχή, αντιπροσωπεύει πάντα μια ισοϋψή σταθερού πάχους (Σχ. 6.7.2.2α). Δηλ. προκειμένου ο κροσσός τάξης m σε θέση χωρίς υμένιο να διατη-

ρήσει την τάξη του μεταβαίνοντας σε θέση με υμένιο, θα πρέπει να περάσει από περιοχή μεγαλύτερου πάχους, επειδή αν περνούσε κατ' ευθείαν στη θέση με υμένιο, το πάχος θα ήταν μικρότερο λόγω της ύπαρξης του υμενίου. Άρα για να συμβεί το προαναφερόμενο, θα πρέπει να μεταβεί καμπτόμενος προς το υμένιο σε περιοχή μεγαλύτερου πάχους ίσου με αυτό που είχε στη θέση χωρίς υμένιο. Αυτός είναι λόγος που οι κροσσοί καμπτόμενοι απομακρύνονται από την ακμή της σφήνας που σχηματίζουν τα πλακίδια F και F'.

Αν T είναι η περίοδος των κροσσών και d η διαφορά του πάχους της σφήνας μεταξύ δύο διαδοχικών κροσσών, τότε $d = \lambda_0/2$. Αλλά από τη (σχ. 6.5.2.5): $\left(\Delta x = T = x_{m+1} - x_m = \lambda_0/2an_f\right)$ οπότε: $T = \lambda_0/2a$. Όπου $n_f \simeq 1.0$ και λ_0 το μ.κ. της



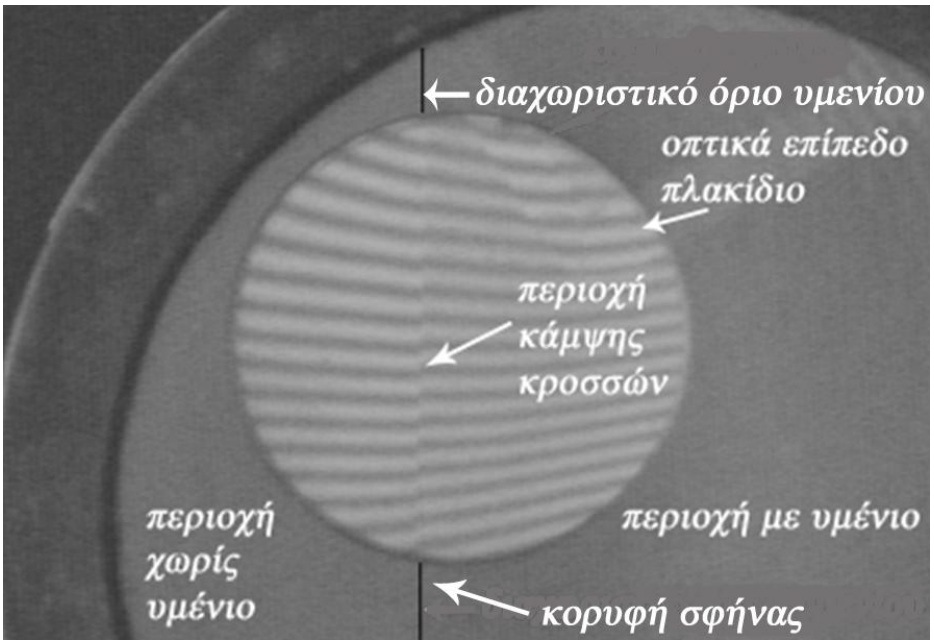
(Σχ. 6.7.2.2)

φωτίζουσας πηγής. Επομένως από τις δύο τελευταίες σχέσεις θα έχουμε: $a = d/T = \lambda_0/2T$. Όμως από το (Σχ. 6.7.2.2β) βλέπουμε ότι ο κροσσός τάξης m για ν' αντισταθμίσει τη διαφορά ύψους Δd (δηλ. το πάχος του υμενίου) πρέπει να μετατοπιστεί κατά ΔT όπου μεταξύ των $\Delta d, \Delta T$ και a ισχύει η σχέση $\Delta d = a\Delta T$. Εφόσον όμως $a = \lambda_0/2T$ θα έχουμε:

$$\Delta d = \left(\frac{\Delta T}{T}\right)\frac{\lambda_o}{2} \qquad (6.7.2.1)$$

Επειδή τα μεγέθη ΔT και T μπορούν να μετρηθούν από το πρότυπο συμβολής (Σχ. 6.7.2.1δ) και το λ_0 είναι γνωστό, από την τελευταία σχέση μπορούμε να προσδιορίσουμε το πάχος Δd του υμενίου. Στην (Εικ. 6.7.2.3) βλέπουμε χαρακτηρίστηκα την κάμψη των κροσσών, όταν πάνω στο διαχωριστικό όριο ενός πολύ λε-

πτού μεταλλικού υμενίου, τοποθετηθεί ένα οπτικά επίπεδο πλακίδιο, προκειμένου να δημιουργηθεί σφήνα.



(Εικ. 6.7.2.3)

6.7.3 *Μέτρηση πάχους λεπτού πλακιδίου μέσω του συμβολόμετρου του Michelson*

Προκειμένου να μετρήσουμε το πάχος L ενός σχετικά λεπτού διαφανούς πλακιδίου με παράλληλες έδρες και δ.δ. n εκτελούμε το εξής πείραμα. Στο πεδίο όρασης του συμβολόμετρου Michelson – με τα κάτοπτρά του σε ορθογώνια θέση – και φωτιζόμενο από εκτεταμένη πηγή που εκπέμπει φως μ.κ. λ_0, εντοπίζουμε από το κέντρο του (που έστω καταλαμβάνεται από τον m τάξης σκοτεινό κροσσό) και σε μια ορισμένη απόσταση από αυτόν τον $m-p$ σκοτεινό κροσσό. Ο p μετρείται από το κέντρο του προτύπου. Κατόπιν σε ένα από τους κλάδους του συμβολόμετρου παρεμβάλλουμε το προς μέτρηση πλακίδιο σε κατακόρυφη θέση. Τότε στο πεδίο θα υπάρξει μετακίνηση των κροσσών από την περιφέρεια του προτύπου προς το κέντρο, που εκδηλώνεται σαν αύξηση της πυκνότητας των κροσσών και το οποίο οφείλεται στην αύξηση της διαφοράς του οπτικού δρόμου στους δύο κλάδους του λόγω της παρεμβολής. Τώρα στη θέση που προηγουμένως μετρούσαμε τον p τάξης σκοτεινό κροσσό, θα εμφανιστεί ο p' (με $p' > p$) όπου πάλι ο p' μετρείται από το κέντρο του προτύπου. Επομένως ο αριθμός των μετακινούμενων κροσσών μετά την παρεμβολή θα είναι τελικά $p'-p$ που θ' αντιστοιχούσε (χωρίς το πλακίδι-

ο) σε μετατόπιση του ενός των κατόπτρων του συμβολόμετρου κατά Δd ή σε διαφορά οπτικού δρόμου (λόγω διπλής μετάβασης) κατά:

$$2\Delta d = (p' - p)\lambda_0 \qquad (6.7.3.1)$$

Η διαφορά αυτή δρόμου είναι που αντισταθμίζει την προκύπτουσα από την παρεμβολή του πλακιδίου. Η τελευταία θα είναι: $\Delta d = nL - 1 \cdot L = (n-1)L$ οπότε:

$$2\Delta d = 2(n-1)L \qquad (6.7.3.2)$$

Από τις (σχ. 6.7.3.1,2) βρίσκουμε: $2(n-1)L = (p' - p)\lambda_0$ και τελικά:

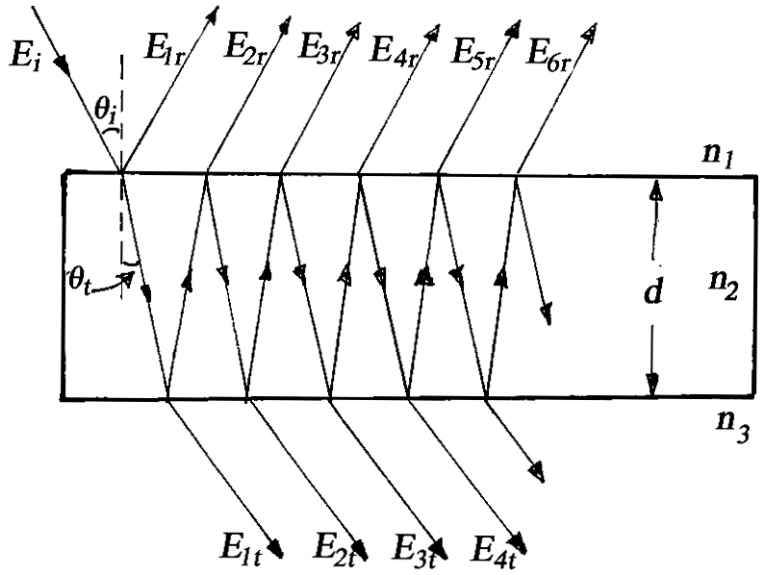
$$L = \frac{\lambda_0}{2}(p' - p)(n-1) \qquad (6.7.3.3)$$

Αν π.χ. φωτίζουμε το συμβολόμετρο με φως από τη λυχνία Να για το οποίο $\lambda_0 = 589.2\text{nm}$ και κατόπιν παρεμβάλλουμε στον ένα του κλάδο φυλλίδιο από Mica με $n = 1.5601$, βλέπουμε ότι έχουμε μετακίνηση $\Delta p = 133$ κροσσών. Τότε με βάση τη (σχ. 6.7.3.3), υπολογίζουμε ότι το πάχος του είναι $L \simeq 70\mu\text{m}$.

Ένας τρόπος που χρησιμοποιείται για να απαριθμήσουμε το σύνολο $p' - p$ των μετακινούμενων κροσσών σταδιακά, είναι με τη βοήθεια δύο πανομοιότυπων πλακιδίων που βρίσκονται ανά ένα παράλληλα με τα δύο κάτοπτρα. Έστω τώρα ότι με αργό τρόπο αρχίζουμε να περιστρέφουμε το ένα από αυτά περί κατακόρυφο άξονα μέχρις ότου αποκτήσει παράλληλο προσανατολισμό με το άλλο (δηλ. το στρέφουμε κατά 90^0). Στη θέση αυτή ουσιαστικά είναι σαν να μην παρεμβάλλεται στον κλάδο που βρίσκεται και η διαφορά οπτικού δρόμου $2(n-1)L$ επιβάλλεται από το πλακίδιο στον άλλο κλάδο. Η αργή περιστροφή του, γίνεται αιτία της αργής μετακίνησης των κροσσών, τους οποίους τελικά μπορούμε να μετρήσουμε σε σχέση με ένα σταθερό σημείο του πεδίου όρασης του συμβολόμετρου.

6.8 *Συμβολή και συμβολόμετρα πολλαπλών δεσμών, μέσω διαίρεσης πλάτους. Το συμβολόμετρο των Fabry-Perot*

Στην (§ 6.5) μελετήσαμε τη συμβολή δύο δεσμών οι οποίες προέκυψαν από τη διαίρεση πλάτους μιας προσπίπτουσας σε διηλεκτρικό πλακίδιο ορισμένου πάχους με παράλληλες έδρες, περιβαλλόμενο από άλλα διηλεκτρικά. Η αρχικά προσ-



(Σχ. 6.8.1)

πίπτουσα διαταραχή πλάτους E_i, μέσω των πολλαπλών ανακλάσεων (Σχ. 6.8.1) και διαθλάσεων μεταξύ των ενδοεπιφανειών που ορίζει το πλακίδιο, οδηγεί στην εμφάνιση ενός μεγάλου πλήθους αναδυόμενων από την πάνω επιφάνεια διαταραχών E_{ir} (ανακλώμενων), καθώς και των αντιστοίχων από την κάτω επιφάνεια E_{it} (διαθλώμενων). Έχει σταθερή διαφορά οπτικού δρόμου ως προς την προηγούμενη ή την επόμενή της, ο οποίος κατά τα γνωστά ($L = 2n_2 d\cos\theta_t$ (σχ. 6.5.1.3)) εξαρτάται από το δ.δ. του πλακιδίου, το πάχος του καθώς και τη γωνία με την οποία διαθλάται στο εσωτερικό του. Το πλάτος της κάθε μιας μεταβάλλεται ανάλογα με τον αριθμό των εσωτερικών ανακλάσεων μεταξύ των ενδοεπιφανειών και έχει σχέση με τον συντελεστή ανακλαστικότητας ρ καθώς και με τους συντελεστές διαπερατότητας τ και τ' κατά τη διάθλασή της μέσω των ενδοεπιφανειών (βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ΘΕΜΑ 1)). Για την περίπτωση όμως των διηλεκτρικών αποδεικνύεται (βλ.§ 6.3.2 Παράδειγμα) ότι αξιόλογη τιμή πλάτους διαθέτουν μόνο οι δύο πρώτες ανακλώμενες E_{1r}, E_{2r} καθώς και οι αντίστοιχές τους διαθλώμενες E_{1t}, E_{2t}.

Πράγματι αν π.χ. πλακίδιο με $n_2 = 1.5$ βρίσκεται μέσα σε αέρα $n_1 = n_3 = 1.0$, τότε υπολογίζεται ότι $E_{1r} = 0.2E_i$, $E_{2r} = 0.192E_i$, $E_{3r} = 0.008E_i$,... Δηλ. η συνεισφορά της τρίτης σε μια πιθανή επαλληλία των διαταραχών θα είναι αμελητέα. Επομένως φαινόμενα συμβολής θα έχουμε από τις δύο πρώτες επειδή οι υπόλοιπες κατ' ελάχιστο επηρεάζουν το πρότυπο συμβολής.

Η κατάσταση όμως αλλάζει ριζικά εάν κατά κάποιο τρόπο αυξήσουμε την ανακλαστικότητα των ενδοεπιφανειών του πλακιδίου. Το ζητούμενο επιτυγχάνεται είτε με την εξάχνωση σ' αυτές λεπτών μεταλλικών υμενίων ή πολυστρωματικών διηλεκτρικών υμενίων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα πλάτη των ανακλωμένων και διαθλώμενων διαταραχών αποκτούν σημαντικές τιμές, με συνέπεια οι συνεισφορές τους να μην μπορούν ν' αγνοηθούν. Επομένως συμβολή θα προκύπτει από την επαλληλία πολύ μεγάλου αριθμού διαταραχών καθορισμένης διαφοράς φάσης μεταξύ τους και με την προϋπόθεση ότι μεταξύ τους υφίσταται συμφωνία. Κλασικό παράδειγμα συμβολόμετρου που η λειτουργία του στηρίζεται στην προαναφερόμενη διαδικασία είναι αυτό των Fabry-Perot, το οποίο θα μελετήσουμε αναλυτικά στην (§ 6.8.2).

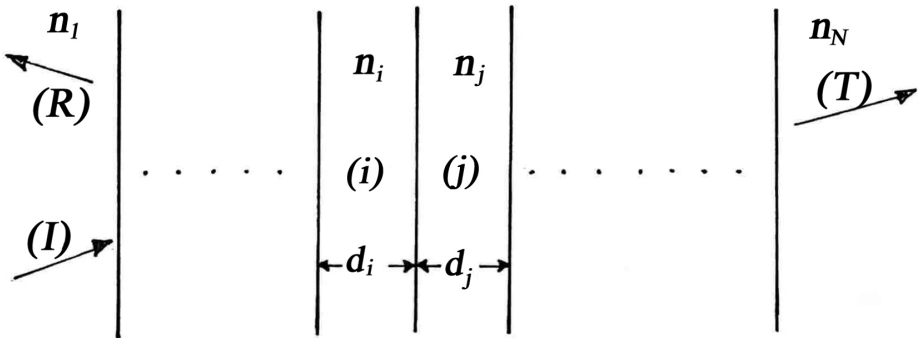
6.8.1 *Συμβολή πολλαπλών δεσμών από πολλαπλότητα υμενίων με επίπεδες επιφάνειες*[*]

Ο υπολογισμός της επαλληλίας των πολλαπλών διαταραχών (ανακλωμένων και διαθλωμένων) μέσω δύο ενδοεπιφανειών είναι μια σχετικά εύκολη διεργασία (βλ. § 6.5.1). Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και στην περίπτωση που θα επιχειρήσουμε τον υπολογισμό μέσω μιας πολλαπλότητας υμενίων διαφορετικού πάχους και δ.δ. όπου οι ενδοεπιφάνειες είναι επίπεδες και παράλληλες μεταξύ τους. Τότε οι διαδικασία γίνεται περίπλοκη και χρονοβόρα. Αυτός είναι ο λόγος που προκειμένου να προσδιοριστεί η ***ανακλαστικότητα R (reflectance)*** και η ***διαπερατότητα T (transmittance)*** ενός πολύπλοκου συστήματος, όπως το προαναφερόμενο, χρησιμοποιούμε ένα φορμαλισμό πινάκων, έτσι ώστε οι πράξεις να εκτελούνται ταχύτατα ιδίως μέσω Η/Υ.

Έστω ότι διαθέτουμε μια πολλαπλότητα υμενίων N τον αριθμό (Σχ. 6.8.1.1) το καθένα με δ.δ. n_i και πάχος d_i. Θεωρούμε ότι η πρόσπτωση του φωτός γίνεται από αριστερά προς τα δεξιά. Τελικό αναμενόμενο αποτέλεσμα θα είναι μια συνολική 'ανακλώμενη' διαταραχή (διαδιδόμενη στο αρχικό μέσο προς τα αριστερά) που θα μας οδηγήσει στον υπολογισμό της ανακλαστικότητας R του συστήματος και μια 'διαθλώμενη' διαταραχή (διαδιδόμενη στο τελικό μέσο προς τα δεξιά), μέσω της

[*] M.V.Klein & T.E.Furtak : “Optics” John W1ley & Sons. N.Y. (Second Edition) (1986) (§ 5.4).

οποίας θα γίνει ο προσδιορισμός της διαπερατότητας T. Όπως είναι γνωστό (βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ΘΕΜΑ 1)), η ανακλαστικότητα R ορίζεται σαν ο λόγος της 'ανακλώμενης' από το σύστημα έντασης του φωτός προς την προσπίπτουσα ενώ η διαπερατότητα T είναι ο λόγος της 'διαθλώμενης' έντασης προς



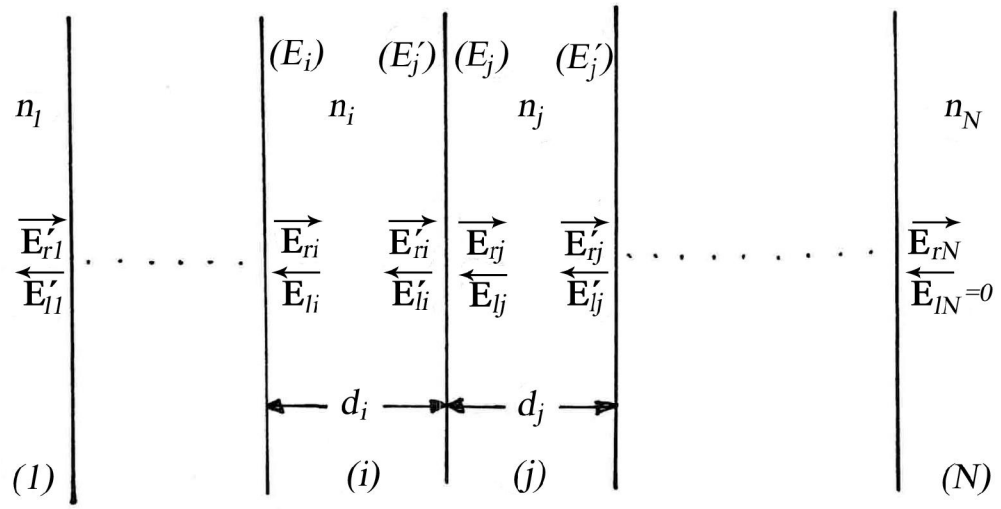
(Σχ. 6.8.1.1)

την προσπίπτουσα. Απαραίτητη προϋπόθεση για τους υπολογισμούς των R,T είναι ο προσδιορισμός των ***συντελεστών ανακλαστικότητας ρ (reflection coefficient)*** και ***διαπερατότητας τ (transmission coefficient)***, που ορίζονται σαν ο λόγος των ανακλωμένων, διαθλωμένων εντάσεων των ηλεκτρικών πεδίων από την πρώτη και τελευταία ενδοεπιφάνεια αντίστοιχα προς το προσπίπτον στην πρώτη.

Η διαδικασία προσδιορισμού αυτών των πεδίων γίνεται με βάση τους εξής συλλογισμούς. Θεωρούμε κατ' αρχή δύο διαδοχικά υμένια i και j στο εσωτερικό της πολλαπλότητας (Σχ. 6.8.1.2). Στο εσωτερικό του καθενός από αυτά (όπως και για το σύνολο των υπολοίπων) θα υφίστανται τα εξής πεδία. Π.χ. για το i υμένιο: τα E_{ri} και E'_{ri} ακριβώς δεξιά από την πρώτη του ενδοεπιφάνεια και ακριβώς αριστερά από τη δεύτερη, τα οποία διαδίδονται προς τα δεξιά. Επίσης υφίστανται τα πεδία E_{li} και E'_{li} ακριβώς δεξιά από τη πρώτη του ενδοεπιφάνεια και ακριβώς αριστερά από τη δεύτερη, τα οποία διαδίδονται προς τα αριστερά. Βλέπουμε δηλαδή ότι ο συμβολισμός των πεδίων είναι άτονος (E) ακριβώς δεξιά από την πρώτη τους ενδοεπιφάνεια και τονούμενος (E') ακριβώς αριστερά από τη δεύτερη, ανεξάρτητα αν διαδίδονται προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά. Κατά τη διέλευση μιας διαταραχής μέσω μιας ενδοεπιφάνειας από το i, στο j υμένιο για τα πλάτη ανακλώμενης και διαθλώμενης θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τους συντελεστές ανακλαστικότητας ρ_{ij},ρ_{ji} και διαπερατότητας τ_{ij},τ_{ji} όπου η διαδοχή μεταξύ των δεικτών $i \to j$ μας δείχνει τη φορά ανάκλασης ή διάθλασης. Είναι γνωστό (βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ΘΕΜΑ 1 – Παράδειγμα)) ότι μεταξύ αυτών των συντελεστών ισχύουν οι σχέσεις:

$$\rho_{ij} = -\rho_{ji} \qquad \text{και} \qquad \tau_{ij}\tau_{ji} = 1 - \rho_{ij}^2 \tag{6.8.1.1}$$

Με τη βοήθεια του (Σχ. 6.8.1.2) μπορούμε πλέον να γράψουμε τις σχέσεις που διέπουν τα ηλ. πεδία που υφίστανται ακριβώς αριστερά και ακριβώς δεξιά μιας τυχαίας ενδοεπιφάνειας της πολλαπλότητας των υμενίων. Π.χ. για την ενδοεπιφάνεια $i \to j$ το διαδιδόμενο προς τα δεξιά πεδίο E_{rj} θα είναι ίσο με το άθροισμα του διαδιδόμενου μέσω της ενδοεπιφάνειας πεδίου κατά την πρόσπτωση του E'_{ri} (δηλ.



(Σχ. 6.8.1.2)

το $\tau_{ij}E'_{ri}$) και του ανακλώμενου κατά την πρόσπτωση σ' αυτήν πεδίου E_{lj} (δηλ. το $\rho_{ji}E_{lj}$). Άρα:

$$E_{rj} = \tau_{ij}E'_{ri} + \rho_{ji}E_{lj} \tag{6.8.1.2}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε:

$$E'_{li} = \tau_{ji}E_{lj} + \rho_{ij}E'_{ri} \tag{6.8.1.3}$$

Με απαλοιφή του όρου E'_{ri} μέσω συσχετισμού των δύο τελευταίων σχέσεων βρίσκουμε:

$$E'_{li} = \left[\frac{\tau_{ij}\tau_{ji} - \rho_{ij}\rho_{ji}}{\tau_{ij}}\right] E_{lj} + \frac{\rho_{ij}}{\tau_{ij}} E_{rj} \tag{6.8.1.4}$$

Κατόπιν με τη βοήθεια των σχέσεων συμμετρίας (σχ. 6.8.1.1) η τελευταία γίνεται:

$$E'_{li} = \left(\frac{1}{\tau_{ij}}\right) E_{lj} + \left(\frac{\rho_{ij}}{\tau_{ij}}\right) E_{rj} \tag{6.8.1.5}$$

Επίσης από τη (σχ. 6.8.1.2) βρίσκουμε:

$$E'_{ri} = \left(\frac{\rho_{ij}}{\tau_{ij}}\right) E_{lj} + \left(\frac{1}{\tau_{ij}}\right) E_{rj} \tag{6.8.1.6}$$

Οι τελευταίες δύο σχέσεις αποτελούν ένα σύστημα συζευγμένων γραμμικών εξισώσεων με τη βοήθεια των οποίων υπολογίζουμε τα διαδιδόμενα πεδία στο αριστερό μέρος μιας ενδοεπιφάνειας μεταξύ δύο διαδοχικών υμενίων $i \to j$, συναρτήσει των πεδίων που διαδίδονται δεξιά της.

Στα επόμενα θα συμβολίζουμε με τον πίνακα:

$$\mathbf{E}_j \equiv \begin{pmatrix} E_{lj} \\ E_{rj} \end{pmatrix}, \tag{6.8.1.7}$$

τις συνιστώσες του πεδίου (διαδιδόμενες προς τα αριστερά και δεξιά) ακριβώς λίγο μετά την αρχή του αριστερού τμήματος του υμενίου j και με τον πίνακα:

$$\mathbf{E}'_i \equiv \begin{pmatrix} E'_{li} \\ E'_{ri} \end{pmatrix} \tag{6.8.1.8}$$

αυτές ακριβώς λίγο πριν το τέλος του δεξιού τμήματος του υμενίου i. Ορίζουμε επίσης σαν ***πίνακα μετάβασης*** $\mathbf{H}_{ij}$ ***(transition matrix)*** της ενδοεπιφάνειας τον:

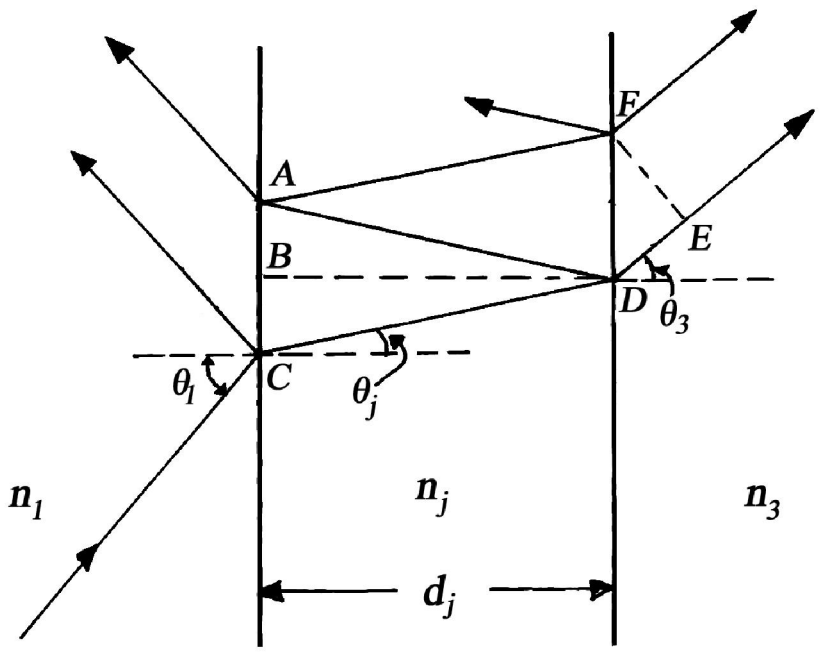
$$\mathbf{H}_{ij} = \frac{1}{\tau_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{ij} \\ \rho_{ij} & 1 \end{pmatrix} \tag{6.8.1.9}$$

Με τη βοήθεια αυτού του πίνακα, οι (Σχ. 6.8.1.5,6) γράφονται:

$$\mathbf{E}'_i = \mathbf{H}_{ij} \mathbf{E}_j \tag{6.8.1.10}$$

Όταν τώρα μια διαταραχή διανύει ένα υμένιο j πάχους d_j κατά γωνία θ_j ως προς

την κάθετο (Σχ. 6.8.1.3), τότε μεταξύ του πεδίου E'_{rj} στο τέλος της διαδρομής της και του E_{rj} στην αρχή της εισάγεται κατά γνωστά μια φάση β_j. Η φάση αυτή, είναι το μισό της διαφοράς φάσης των δύο διαθλώμενων διαταραχών (πρώτης και δεύτερης προς τα δεξιά του υμενίου) (Σχ. 6.8.1.3) στο μέσο με δ.δ. n_j. Οι προαναφερόμενες οφείλονται στην προσπίπτουσα με γωνία θ_1, από το χώρο αριστερά του υμενίου που καταλαμβάνεται από μέσο με δ.δ. n_1. Η γωνία διάθλασης στο εσωτερικό του υμενίου είναι η θ_j και το πάχος του είναι d_j.



(Σχ. 6.8.1.3)

Αν L' είναι η διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ των δύο πρώτων διαθλώμενων διαταραχών από τη δεξιά επιφάνεια του υμενίου θα έχουμε:
$L' = 3(CD)n_j - \left[(CD)n_j + (DE)n_3\right] \Rightarrow L' = 2(CD)n_j - (DE)n_3$. Τότε ο επιπλέον οπτικός δρόμος L που αντιστοιχεί στη διάδοση του πεδίου $\mathbf{E}_{rj}$ αριστερά του υμενίου j μέχρι τα δεξιά του όπου και η τιμή του είναι η $\mathbf{E}'_{rj}$ είναι: $L = (CD)n_j - \frac{(DE)}{2}n_3$. Αλλά: $(CD) = d_j \cos\theta_j$, $(FD) = 2d_j \tan\theta_j$ και $(DE) = (FD)\sin\theta_3$. Οπότε:
$(DE)n_3 = (FD)n_3 \sin\theta_3$. Και από το νόμο του Snell: $n_j \sin\theta_j = n_3 \sin\theta_3$. Άρα:

$(DE)n_3 = (FD)n_j \sin\theta_j$. Οπότε: $L = (CD)n_j - \frac{(DE)}{2}n_3 = \frac{d_j n_j}{\cos\theta_j} = \frac{(ED)}{2}n_j \sin\theta_j =$

$$= \frac{d_j n_j}{\cos\theta_j} - \frac{d_j \sin\theta_j}{2\cos\theta_j} n_j \sin\theta_j = \frac{d_j n_j}{\cos\theta_j} - \frac{d_j n_j \sin^2\theta_j}{\cos\theta_j} \Rightarrow L = d_j n_j \cos\theta_j .$$

Οπότε η φάση β_j δίνεται από τη σχέση:

$$\beta_j = \frac{2\pi}{\lambda_o} n_j d_j \cos\theta_j \qquad (6.8.1.11)$$

Επομένως μεταξύ των πεδίων E'_{rj} και E_{rj} θα υφίσταται η σχέση:

$$E'_{rj} = E_{rj} e^{-i\beta_j} \quad \text{ή} \quad E_{rj} = E'_{rj} e^{i\beta_j} \qquad (6.8.1.12)$$

Με τον ίδιο τρόπο για διάδοση από τα δεξιά προς τα αριστερά του υμενίου θα έχουμε:

$$E_{lj} = E'_{lj} e^{-i\beta_j} \qquad (6.8.1.13)$$

Εάν τώρα ορίσουμε έναν ***πίνακα διάδοσης*** $\mathbf{L}_j$ ***(propagation matrix)*** στο υμένιο με τη μορφή:

$$\mathbf{L}_j = \begin{pmatrix} e^{-i\beta_j} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_j} \end{pmatrix} \qquad (6.8.1.14)$$

τότε οι (σχ. 8.3.1.12,13) μπορούν να γραφούν με τη μορφή πίνακα ως εξής:

$$\mathbf{E}_j = \mathbf{L}_j \mathbf{E}'_j \qquad (6.8.1.15)$$

Δηλαδή: $\begin{pmatrix} E_{lj} \\ E_{rj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\beta_j} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_{lj} \\ E'_{rj} \end{pmatrix}$.

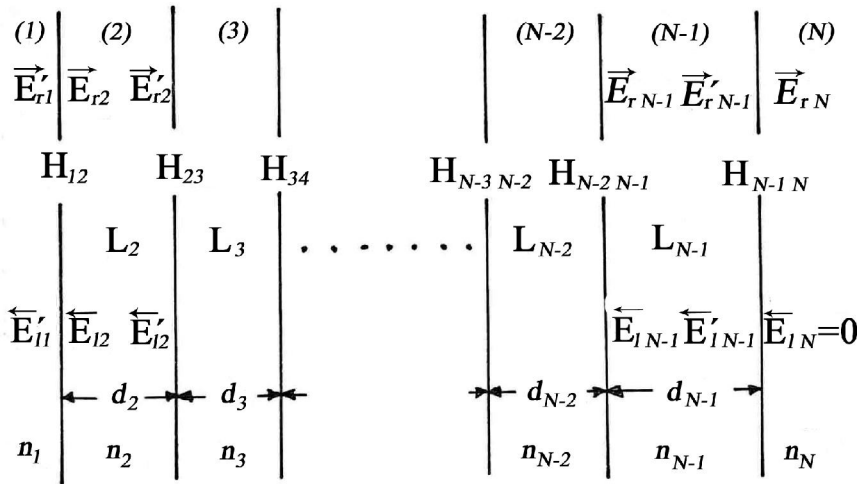
Δεχόμαστε τέλος ότι για τα πεδία στο τελευταίο μέσο ισχύει η εξής οριακή συνθήκη:

$$\mathbf{E}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{rN} \end{pmatrix} \qquad (6.8.1.16)$$

δηλ. ότι δεν υπάρχει πεδίο διαδιδόμενο προς τα αριστερά.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι διαθέτουμε ένα σύστημα πολλαπλών υμενίων N τον αριθμό (Σχ. 6.8.1.4), το καθένα πάχους d_j και δ.δ. n_j. Το πρόβλημα το οποίο

τίθεται για επίλυση, είναι ο υπολογισμός της ανακλαστικότητας R καθώς και της διαπερατότητας T αυτού του συστήματος. Προκειμένου να επιτευχθεί το ζητού-



(Σχ. 6.8.1.4)

μενο, θα πρέπει να προσδιοριστούν τα πεδία E'_{l1} (το συνολικά 'ανακλώμενο' από την πρώτη ενδοεπιφάνεια) και E_{rN} (το συνολικά 'διαθλώμενο' από την τελευταία), με την προϋπόθεση ότι στην είσοδο του συστήματος και με φορά από αριστερά προς τα δεξιά προσπίπτει το πεδίο E'_{r1}. Η επίλυση γίνεται με τη βοήθεια των πινάκων μετάβασης των διαδοχικών ενδοεπιφανειών και αυτών της διάδοσης στο εσωτερικό των υμενίων μέσω των σχέσεων μετασχηματισμού (σχ. 6.8.1.10 και 6.8.1.15):

$$\mathbf{E}'_i = \mathbf{H}_{ij}\mathbf{E}_j \qquad \text{και} \qquad \mathbf{E}_j = \mathbf{L}_j\mathbf{E}'_j$$

Τότε με τη βοήθεια του (Σχ. 6.8.1.4) βρίσκουμε: α) Για τη μετάβαση από το $N-1$ στο N υμένιο και τη διάδοση στο $N-1$ υμένιο:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}'_{N-1} &= \mathbf{H}_{N-1,N}\mathbf{E}_N \\ \mathbf{E}_{N-1} &= \mathbf{L}_{N-1}\mathbf{E}'_{N-1}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{E}_{N-1} = \mathbf{L}_{N-1}\mathbf{H}_{N-1,N}\mathbf{E}_N \qquad (6.8.1.17)$$

β) Για τη μετάβαση από το $N-2$ στο $N-1$ υμένιο και τη διάδοση στο $N-2$ υμένιο:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}'_{N-2} &= \mathbf{H}_{N-2,N-1}\mathbf{E}_{N-1} \\ \mathbf{E}_{N-2} &= \mathbf{L}_{N-2}\mathbf{E}'_{N-2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{E}_{N-2} = \mathbf{L}_{N-2}\mathbf{H}_{N-2,N-1}\mathbf{E}_{N-1} \qquad (6.8.1.18)$$

Τότε από τις (σχ. 6.8.1.17,18) βρίσκουμε:

$$\mathbf{E}_{N-2} = \mathbf{L}_{N-2}\mathbf{H}_{N-2,N-1}\mathbf{L}_{N-1}\mathbf{H}_{N-1,N}\mathbf{E}_N \qquad (6.8.1.19)$$

γ) Για τη μετάβαση από το 1 στο 2 υμένιο και τη διάδοση στο 2 υμένιο:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}_1' = \mathbf{H}_{12}\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_2 = \mathbf{L}_2\mathbf{E}_2'\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{E}_1' = \mathbf{H}_{12}\mathbf{L}_2\mathbf{E}_2' \qquad (6.8.1.20)$$

Τελικά ο συνδυασμός μεταξύ των (σχ. 6.8.1.19,20) μας οδηγεί στον υπολογισμό των πεδίων εισόδου σε σχέση με τα πεδία εξόδου:

$$\mathbf{E}_1' = \mathbf{H}_{12}\mathbf{L}_2\mathbf{H}_{23}\mathbf{L}_3.....\mathbf{L}_{N-2}\mathbf{H}_{N-2,N-1}\mathbf{L}_{N-1}\mathbf{H}_{N-1,N}\mathbf{E}_N \qquad (6.8.1.21)$$

όπου ως γνωστόν : $\mathbf{E}_1' = \begin{pmatrix} E_{l1}' \\ E_{r1}' \end{pmatrix}$ και $\mathbf{E}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{rN} \end{pmatrix}$

Ο συνδυασμός του γινομένου των πινάκων της (σχ. 6.8.1.21) μας δίνει ένα πίνακα (2x2) με στοιχεία S_{ij} δηλ.:

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}_{12}\mathbf{L}_2\mathbf{H}_{23}\mathbf{L}_3.....\mathbf{L}_{N-2}\mathbf{H}_{N-2,N-1}\mathbf{L}_{N-1}\mathbf{H}_{N-1,N} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \qquad (6.8.1.22)$$

Ο τελευταίος πίνακας περιλαμβάνει το σύνολο των πολλαπλών ανακλάσεων και διαθλάσεων μέσω της πολλαπλότητας των N υμενίων και μας οδηγεί όπως θα δούμε στα επόμενα στην επίλυση του προβλήματος του υπολογισμού της ανακλαστικότητας R και της διαπερατότητας T του συστήματος.

Πράγματι αν με $\mathbf{S}$ (σχ.6.8.1.22) παραστήσουμε το γινόμενο των πινάκων μετάβασης και διάδοσης της (σχ. 6.8.1.21), τότε αυτή μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{E}_1' = \mathbf{S}\mathbf{E}_N \text{ ή } \begin{pmatrix} E_{l1}' \\ E_{r1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ E_{rN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{12}E_{rN} \\ S_{22}E_{rN} \end{pmatrix} \qquad (6.8.1.23)$$

Από την τελευταία μπορούμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή ανακλαστικότητας $\rho = E_{l1}'/E_{r1}'$ καθώς και τον αντίστοιχο της διαπερατότητας $\tau = E_{rN}/E_{r1}'$ όπου:

$$\rho = E'_{l1}/E'_{r1} = S_{12}/S_{22} \quad \text{και} \quad \tau = E_{rN}/E'_{r1} = 1/S_{22} \tag{6.8.1.24}$$

Τέλος η ανακλαστικότητα R και η διαπερατότητα T του συστήματος, με βάση τους αντίστοιχους ορισμούς (βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ΘΕΜΑ 1)(σχ. 1.11,12)) θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$R = |\rho|^2 \qquad \text{και} \qquad T = \frac{n_N \cos\theta_N}{n_1 \cos\theta_1}|\tau|^2 \tag{6.8.1.25}$$

όπου θ_1, θ_N οι γωνίες που σχηματίζονται από την προσπίπτουσα στην πρώτη ενδοεπιφάνεια του συστήματος και την εξερχόμενη από την τελευταία σε σχέση με τις καθέτους σ' αυτές.

6.8.2 *Το συμβολόμετρο των Fabry-Perot και η αντίστοιχη φασματοσκοπία*

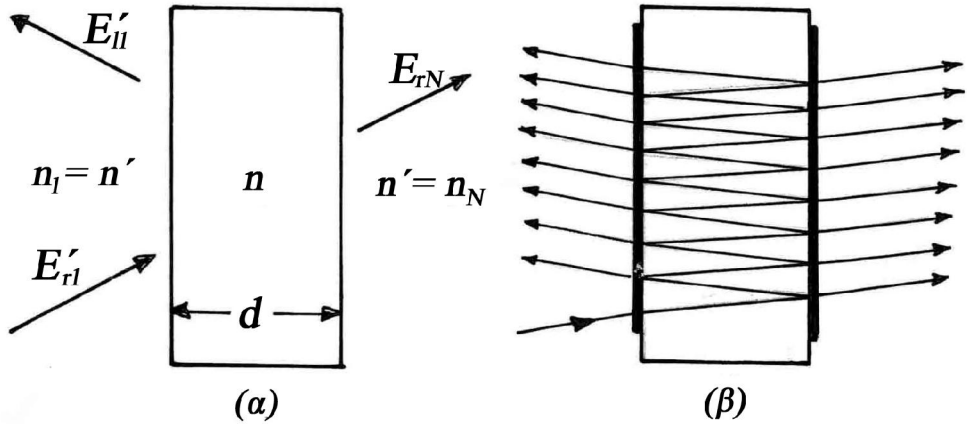
α) *Ανακλαστικότητα και διαπερατότητα μέσω πλακιδίου με παράλληλες έδρες πάχους d και δ.δ. n, που βρίσκεται στο ίδιο διηλεκτρικό δ.δ. n΄*

Στο (Σχ. 6.8.2.1α), φαίνεται το προαναφερόμενο πλακίδιο. Για τον υπολογισμό των R και T , θα πρέπει να προσδιορίσουμε τον πίνακα $\mathbf{S}$ του συστήματος μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}_{12}\mathbf{L}_2\mathbf{H}_{21} \tag{6.8.2.1}$$

όπου οι πίνακες μετάβασης των δύο ενδοεπιφανειών $\mathbf{H}_{12}, \mathbf{H}_{21}$ δίνονται από τις σχέσεις: $\mathbf{H}_{12} = \frac{1}{\tau_{12}}\begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_{21} = \frac{1}{\tau_{21}}\begin{pmatrix} 1 & \rho_{21} \\ \rho_{21} & 1 \end{pmatrix}$ και ο πίνακας διάδοσης από τον: $\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} e^{-i\beta} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}$ με $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_o} nd \cos\theta$. Η αντικατάστασή τους στη (σχ. 6.8.2.1) μας οδηγεί στον πίνακα: $\mathbf{S} = \frac{1}{\tau_{12}\tau_{21}}\begin{pmatrix} e^{-\iota\beta} + e^{\iota\beta}\rho_{12}\rho_{21} & e^{-\iota\beta}\ \rho_{21} + e^{\iota\beta}\rho_{12} \\ e^{-\iota\beta}\rho_{12} + e^{\iota\beta}\rho_{21} & e^{-\iota\beta}\ \rho_{12}\rho_{21} + e^{\iota\beta} \end{pmatrix}$ από τον οποίο με βάση τις (σχ. 6.8.1.24) βρίσκουμε:

$$\rho = S_{12} / S_{22} = \frac{\rho_{12}\left(e^{i\beta} - e^{-i\beta}\right)\, e^{-i\beta}}{1-\rho_{12}^2 e^{-i2\beta}} \qquad \text{και} \qquad \tau = 1/S_{22} = \frac{\tau_{12}\tau_{21}e^{-i\beta}}{1-\rho_{12}^2 e^{-i2\beta}} \tag{6.8.2.2}$$



(Σχ. 6.8.2.1)

Τότε η ανακλαστικότητα R και η διαπερατότητα T του πλακιδίου θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$R = |\rho|^2 = \frac{4|\rho_{12}|^2 \sin^2\beta}{\left|1-\rho_{12}^2 e^{-i2\beta}\right|^2} \tag{6.8.2.3}$$

και

$$T = \frac{n_N \cos\theta_N}{n_1 \cos\theta_1}|\tau|^2 = \frac{|\tau_{12}\tau_{21}|^2}{\left|1-\rho_{12}^2 e^{-i2\beta}\right|^2} \tag{6.8.2.4}$$

Για λόγο που θα εξηγήσουμε αμέσως μετά, μας ενδιαφέρει η ανακλαστικότητα των ενδοεπιφανειών του πλακιδίου ν' αυξηθεί τα μέγιστα, γεγονός που δεν συμβαίνει όταν οι τελευταίες συνίστανται από διηλεκτρικά. Για το λόγο αυτό επικαλύπτουμε τις επιφάνειες του πλακιδίου με μεταλλικά υμένια ορισμένου πάχους (Σχ. 6.8.2.1β). Το σύστημα αυτό όμως περιλαμβάνει τέσσερις ενδοεπιφάνειες και ο υπολογισμός των R και T γίνεται πιο περίπλοκος. Προκειμένου όμως να διατηρήσουμε τη δομή των R και T με τη μορφή που μας δίνουν οι (σχ. 6.8.2.3,4) μπορούμε να υποθέσουμε ότι η επίδραση ενός μεταλλικού υμενίου θα αφορά ένα παράγοντα απορρόφησης κατά τη διέλευση της διαταραχής δια μέσου του καθώς και μία πρόσθετη μεταβολή στη φάση κατά την ανάκλαση. Με βάση τα προαναφερόμενα, ο συντελεστής ανακλαστικότητας ρ_{12} παίρνει τη μορφή:

$$\rho_{12} = \rho_0 e^{-i\gamma} \tag{6.8.2.5}$$

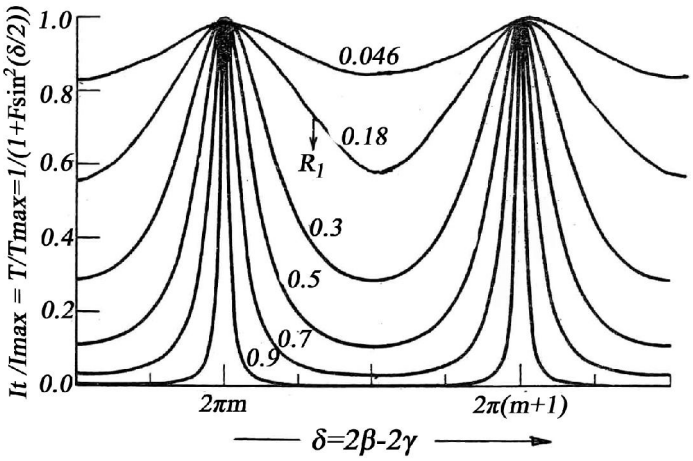
όπου ρ_0 πραγματικός αριθμός και γ η πρόσθετη φάση η οποία κατά προσέγγιση θεωρείται σταθερή για οποιαδήποτε γωνία πρόσπτωσης. Είναι πολύ σημαντικό επίσης στους υπολογισμούς μας να χρησιμοποιήσουμε την ανακλαστικότητα R_1 και τη διαπερατότητα T_1 που αναφέρονται σε μια μόνο ανάκλαση και μια μόνο διάβαση διαταραχής μέσω του πλακιδίου. Θα έχουμε επομένως:

$$R_1 = |\rho_{12}|^2 = \rho_0^2 \quad \text{και} \quad T_1 = |\tau_{12}\tau_{21}|^2 \tag{6.8.2.6}$$

Τότε μετά την αντικατάσταση των (σχ. 6.8.2.5,6) στην (σχ. 6.8.2.4) και την εκτέλεση των πράξεων βρίσκουμε:

$$\frac{I_t}{I_i} = T = \frac{T_1^2}{1 + R_1^2 - 2R_1 \cos\delta} \tag{6.8.2.7}$$

όπου $\delta = 2\beta - 2\gamma$ παριστάνει τη συνολική διαφορά φάσης μεταξύ διαδοχικών διαβάσεων μιας διαταραχής κατά τη διαδικασία των πολλαπλών ανακλάσεων. Μέρος αυτής (2β) οφείλεται στη διάδοση και μέρος (2γ) στην ανάκλαση (μετάλλου - διηλεκτρικού). I_t είναι κατά τον ορισμό της T η συνολική διερχόμενη από το σύστημα ένταση και I_i η προσπίπτουσα. Από φυσική άποψη η τελευταία σχέση μας



(Σχ. 6.8.2.2)

δίνει την κατανομή της έντασης του φωτός (I_t) καθώς μεταβάλλεται η δ, ή ακριβέστερα η γωνία $\theta(\beta = 2\pi d \cos\theta/\lambda_0)$ επειδή $\gamma =$ σταθ. Η γραφική παράσταση της $I_t/I_{t\max} = T_t/T_{t\max}$ για διάφορες τιμές της R_1 δίνεται στο (Σχ. 6.8.2.2), όπου γίνεται

εμφανής η περιοδική της μεταβολή όταν η δ μεταβάλλεται κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Πρόκειται για τη χαρακτηριστική μορφή της κατατομής της έντασης (των κροσσών συμβολής) που προκύπτει από τη συμβολή πολλαπλών δεσμών για διάφορες τιμές της ανακλαστικότητας R_1 των επικαλυμμένων με μεταλλικά υμένια επιφανειών του πλακιδίου από διηλεκτρικό. Επειδή όμως οι ενδοεπιφάνειες παρουσιάζουν απορρόφηση λόγω των μεταλλικών υμενίων, τότε με βάση την αρχή της διατήρησης της ενέργειας θα ισχύει η σχέση: $R_1 + T_1 = 1 - A_1$ όπου A_1 η ***απορροφητικότητα (absorptance)*** (για μια διάβαση). Από τη (σχ. 6.8.2.7) για $\cos\delta = 1$ θα έχουμε $T = T_{\max}$ οπότε:

$$T_{\max} = \frac{T_1^2}{\left(1 - R_1\right)^2} = \left[1 - \frac{A_1}{1 - R_1}\right]^2 \qquad (6.8.2.8)$$

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε διηλεκτρικές ενδοεπιφάνειες, τότε $A_1 = 0$ και $T_{\max} = 1$. Όμως κάτω από αυτές τις συνθήκες, είναι γνωστό ότι η ανακλαστικότητα είναι πολύ μικρή. Τότε η $T_{\min}$, η οποία επιτυγχάνεται για $\cos\delta = -1$ και δίνεται από τη σχέση:

$$T_{\min} = \frac{T_1^2}{1 + R_1^2 + 2R_1} = \frac{T_1^2}{\left(1 + R_1\right)^2} = T_{\max}\frac{\left(1 - R_1\right)^2}{\left(1 + R_1\right)^2} \qquad (6.8.2.9)$$

θα έχει σημαντικά μεγάλη τιμή, συγκρίσιμη ακόμη και με την $T_{\max}$. Συνέπεια αυτού του γεγονός είναι ότι η φωτοαντίθεση των κροσσών (σχ. 6.4.1.20) $\mathcal{V} = \left(I_{max} - I_{\min}\right)/\left(I_{\max} + I_{\min}\right) = \left(T_{max} - T_{\min}\right)/\left(T_{\max} + T_{\min}\right)$ θα είναι πολύ μικρή (βλ. Σχ. 6.8.2.2) για $R_1 = 0.046$ και $R_1 = 0.18$). Για να ελαττωθεί η $I_{\min}$ προκειμένου να επιτύχουμε μεγάλη φωτοαντίθεση των κροσσών συμβολής, χρειάζεται η R_1 να τείνει προς τη μονάδα ($R_1 \simeq 1$). Κάτω από αυτές τις συνθήκες οι τιμές της T (και κατά προέκταση της I_t) θα είναι σημαντικές μόνο γύρω από τις τιμές $\delta = 2\pi m$ με το m να ανήκει στο σύνολο των ακεραίων αριθμών. Η αύξηση της R_1 κατά τα γνωστά επιτυγχάνεται μέσω της εναπόθεσης μεταλλικών υμενίων. Π.χ. για ένα υμένιο Ag πάχους $\simeq 50\mu\text{m}$ επιτυγχάνεται $R_1 \simeq 0.94$, $T_1 = 0.01$ και $A_1 \simeq 0.05$.

Με τη βοήθεια των (σχ. 6.8.2.7, 8) βρίσκουμε:

$$T = T_{\max}\frac{\left(1 - R_1\right)^2}{1 + R_1^2 - 2R_1\cos\delta} = \frac{T_{\max}}{1 + \dfrac{4R_1}{\left(1 - R_1\right)^2}\sin^2\dfrac{\delta}{2}} = \frac{T_{\max}}{1 + F\sin^2\dfrac{\delta}{2}} \qquad (6.8.2.10)$$

όπου η: $F = 4R_1 / (1 - R_1)^2$ (6.8.2.11)

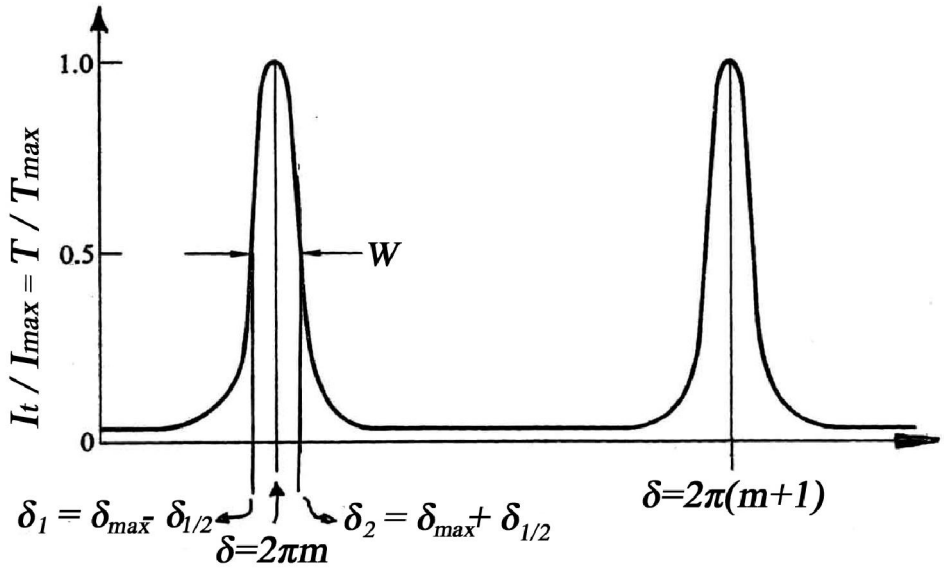
ονομάζεται ***φωτοαντίθεση (contrast)*** των κροσσών και η (σχ. 6.8.2.10) ***τύπος του Airy (Airy formula).*** Ο τύπος του Airy σε σχέση με τις εντάσεις I_t και $I_{t\,\max}$ (επειδή $T = I_t / I_i$), γράφεται:

$$I_t = \frac{I_{t\max}}{1 + F\sin^2\frac{\delta}{2}} \qquad (6.8.2.12)$$

Όταν $\sin(\delta/2) = +1$ τότε $T = T_{\min}$ και από τη (σχ. 6.8.2.10) βρίσκουμε :

$$T_{\min} = T_{\max} / (1 + F) \quad \text{ή} \quad I_{\max} / I_{\min} = 1 + F \qquad (6.8.2.13)$$

Ο λόγος αυτός θα είναι πολύ μεγάλος (μεγάλη φωτοαντίθεση των κροσσών) όταν η F είναι μεγάλη, που σημαίνει θα πρέπει η R_1 και τείνει στη μονάδα. Π.χ. αν όπως προηγουμένως για το υμένιο του Ag $R_1 = 0.94$, τότε $F \simeq 1044$.



(Σχ. 6.8.2.3)

Ένα μέτρο της λεπτότητας των κροσσών συμβολής δηλ. το ποσό απότομα πέφτει η έντασή τους σε κάθε πλευρά της κατανομής τους σε σχέση με το μέγιστο, δίνεται από τον παράγοντα w που ονομάζεται ***πλάτος στο μισό ή εύρος (half-width)*** (Σχ. 6.8.2.3). Αντιστοιχεί στο εύρος της διαφοράς φάσης $\delta_2 - \delta_1 = w = 2\delta_{1/2}$

σε σχέση με την $\delta_{\max} = 2\pi m$, για τα ακραία σημεία: $\delta_1 = \delta_{\max} - \delta_{1/2}$ και $\delta_2 = \delta_{\max} + \delta_{1/2}$ της οποίας θα είναι: $T = T_{\max}/2$ (ή $I_t = I_{t\max}/2$). Τότε από τη (σχ. 6.8.2.10) θα έχουμε: $\frac{T}{T_{\max}} = \frac{I_t}{I_{t\max}} = \frac{1}{1 + F\sin^2\frac{\delta_{1/2}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow F\sin^2\frac{\delta_{1/2}}{2} = 1$. Οπότε: $\delta_{1/2} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{F}}$. Και επειδή η τιμή της F είναι αρκετά μεγάλη: $\sin\frac{1}{\sqrt{F}} \simeq \frac{1}{\sqrt{F}}$. Οπότε $\delta_{1/2} \simeq \frac{2}{\sqrt{F}}$. Επομένως $\delta_2 - \delta_1 = w = 2\delta_{1/2}$ και:

$$w \cong \frac{4}{\sqrt{F}} \tag{6.8.2.14}$$

Επειδή δε $F = 4R_1/(1-R_1)^2$, όσο η ανακλαστικότητα $R_1 \to 1$ τόσο το εύρος w των κροσσών θα γίνεται μικρότερο. Ένα άλλο μέτρο της στενότητας των κροσσών είναι ο παράγοντας $\mathcal{F}$ που ονομάζεται ***λεπτότητα (finesse)***. Ορίζεται από το λόγο:

$$\mathcal{F} = 2\pi/w = \pi\sqrt{F}/2 \tag{6.8.2.15}$$

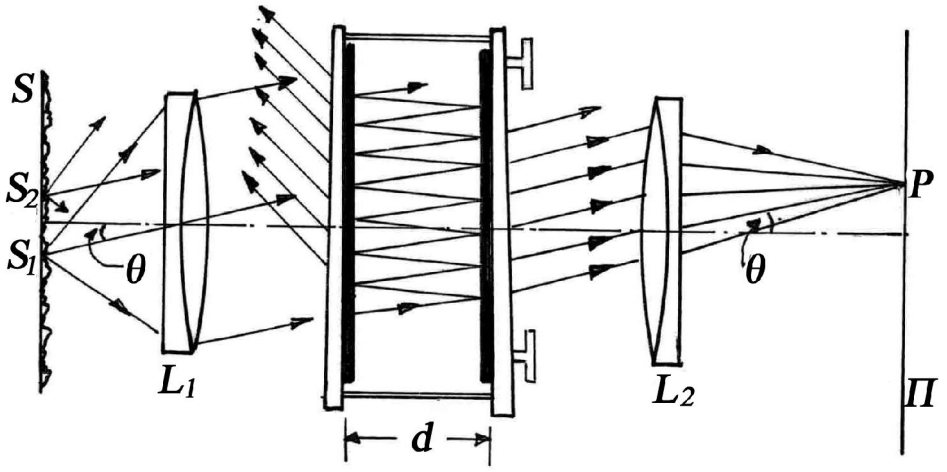
Όταν π.χ. η τιμή της φωτοαντίθεσης είναι $F = 1044$, τότε βρίσκουμε ότι $\mathcal{F} \simeq 50$. Στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος και για τα περισσότερα των συμβολόμετρων Farby-Perot θα έχουμε $\mathcal{F} \simeq 30$. Πολύ μεγάλες τιμές της ($\mathcal{F} \simeq 1000$) επιτυγχάνουμε με τα συμβολόμετρα Fabry-Perot που διαθέτουν κοίλα κάτοπτρα και είναι επικαλυμμένα με ανακλαστικά υμένια διηλεκτρικών πολλαπλών επιστρώσεων (βλ. (§ 6.8.4)).

β) Η δομή του συμβολόμετρου Fabry-Perot

Στο (Σχ. 6.8.2.4) φαίνεται η διάταξη ενός συμβολομέτρου Fabry-Perot. Το βασικό του εξάρτημα (etalon) είναι δύο οπτικά επίπεδες διαφανείς παράλληλες πλάκες που βρίσκονται σε μια ορισμένη απόσταση d μεταξύ τους. Το εσωτερικό τους είναι επικαλυμμένο με ένα ισχυρά ανακλαστικό μεταλλικό ημιδιαφανές υμένιο. Οι πλάκες στο εξωτερικό τους μέρος είναι σφηνοειδούς μορφής, μικρής διαθλαστικής γωνίας (λίγων λεπτών της μοίρας), προκειμένου να εκτρέπουν το πρότυπο συμβολής που θα προέκυπτε από τις ανακλάσεις ανάμεσά τους. Στο συμβολόμετρο η απόσταση d μεταξύ των πλακών πρέπει να είναι εντελώς σταθερή και η παραλ-

ληλία τους τέλεια. Η σταθερότητα επιτυγχάνεται αν οι επιφάνειες έρχονται σε επαφή με κυλίνδρους από κράμα invar (ορισμένου πάντα πλάτους d) ή με διαχωριστές από χαλαζία. Τα δύο αυτά υλικά έχουν πολύ μικρό συντελεστή γραμμικής διαστολής ($\simeq 10^{-7}\,\mathrm{grad}^{-1}$) με αποτέλεσμα η απόσταση d να μην επηρεάζεται από τις συνήθεις θερμοκρασιακές μεταβολές. Η παραλληλία μεταξύ των πλακών, καθορίζεται από ένα σύστημα ρυθμιστών κλίσεις στη μία από τις πλάκες.

Το σύστημα φωτισμού συνίσταται από μία εκτεταμένη πηγή S. Συνήθως είναι ένα θαμπόγυαλο (σκεδαστής) το οποίο φωτίζεται κατ' ευθείαν από μία φασματική λυχνία ή άλλη πηγή. Για να ενισχύσουμε το φως που πέφτει στο συμβολόμετρο, μπορούμε να τοποθετήσουμε την πηγή S στο εμπρός εστιακό επίπεδο θετικού φακού L_1. Υποθέτουμε τώρα ότι μία διαταραχή από τη δέσμη φωτός που προέρχεται από τη στοιχειώδη πηγή S_1 της S, πέφτει στο συμβολόμετρο με γωνία θ. Μπαίνει στο χώρο μεταξύ των μεταλλικών υμενίων που μπορεί να είναι αέρας ή

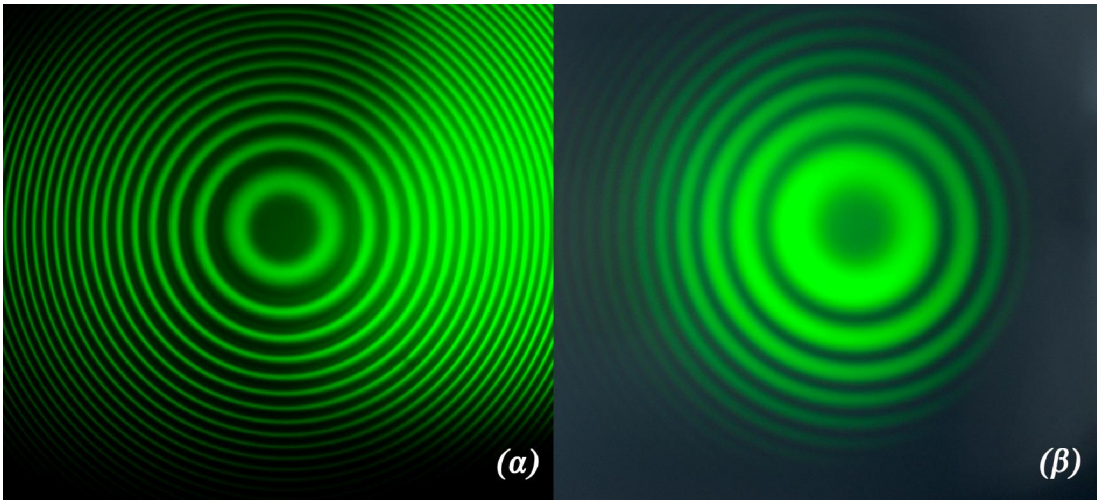


(Σχ. 6.8.2.4)

υλικό με δ.δ. n. Τότε μέσω των πολλαπλών ανακλάσεων και διαθλάσεων, δημιουργείται με διαίρεση πλάτους, διερχόμενη από τη δεύτερη επιφάνεια του συμβολόμετρου παράλληλη δέσμη διαταραχών με την ίδια κλίση θ ως προς τον άξονα του συμβολόμετρου. Οι προαναφερόμενες διαταραχές (σταθερής διαφοράς φάσης μεταξύ τους) θα συμβάλλουν στο άπειρο εκτός αν στην πορεία τους τοποθετήσουμε συγκλίνοντα φακό L_2. Τότε κατά τα γνωστά, η συμβολή (μακρινού πεδίου) συντελείται σ' ένα σημείο P του πίσω του εστιακού επιπέδου όπου το P φαίνεται από το κέντρο του φακού με γωνία θ. Οποιαδήποτε άλλη διαταραχή που εκπέμπεται από μια διαφορετική στοιχειώδη πηγή (έστω τη S_2) και διαδίδεται παράλληλα με αυτήν που προέκυψε από τη S_1, θα μας δώσει με τον ίδιο τρόπο μια κατανομή έντασης

στο σημείο P. Η επαλληλία όμως στο P όλων των διαταραχών από τις S_1, S_2 κ.λ.π. θα είναι ασύμφωνες μεταξύ τους, επειδή κατά τα γνωστά προέρχονται από διαφορετικά τμήματα της πηγής S. Σαν τελικό όμως αποτέλεσμα θα έχουμε την αύξηση της λαμπρότητας του προτύπου συμβολής.

Το δημιουργούμενο πρότυπο στο πίσω εστιακό επίπεδο του φακού L_2, θα είναι κυκλικής συμμετρίας. Το τελευταίο αποδεικνύεται εύκολα αν υποθέσουμε ότι περιστρέφουμε τη στοιχειώδη πηγή S_1 (Σχ. 6.8.2.4) σε επίπεδο κάθετο στον άξονα του συμβολομέτρου κατά 360^0. Τότε και το σημείο P στο πίσω εστιακό επίπεδο του φακού L_2 θα διαγράψει κύκλο. Όταν η φωτίζουσα πηγή είναι μονοχρωματική το πρότυπο συμβολής θα έχει τη μορφή της (Εικ. 6.8.2.5α). Κύριο χαρακτηριστικό του είναι ότι σε σκοτεινό υπόβαθρο, εμφανίζονται φωτεινοί κροσσοί που τους διακρίνει μεγάλη λεπτότητα. Ο τρόπος δημιουργίας των κροσσών είναι σχεδόν πανομοιότυπος μ' αυτόν των κροσσών ίσης κλίσης του Haidinger (βλ. § 6.5.1 – Παράδειγμα), με τη διαφορά ότι η κατανομή της έντασής τους δίνεται από τη (σχ. 6.8.2.12) από όπου και για μεγάλη τιμή της ανακλαστικότητας R_1 συνεπάγεται η υψηλή λεπτότητά τους (Σχ. 6.8.2.2). Σε αντίθεση η κατανομή της έντασης του φωτός για τους κροσσούς Haidinger, δίνεται από μια καθαρά συνημιτονικής μορφής έκφραση (σχ. 6.6.10) και το πρότυπό τους εμφανίζει τη γνωστή μορφή της (Εικ. 6.8.2.5β) με κροσσούς μεγάλου πάχους. Η περιοδική επανάληψη των κροσσών



(Εικ. 6.8.2.5)

στο συμβολόμετρο Fabry-Perot εξαρτάται από τον παράγοντα $\sin^2(\delta/2)$ της (σχ. 6.8.2.12). Αν $R_1 \to 1$ τότε $F \gg$ οπότε μπορούμε να παράγουμε μια προσεγγιστική έκφραση της I_t όταν η δ είναι κοντά στην τιμή $2m\pi$ όπου m ακέραιος. Τότε έ-

χουμε τη δυνατότητα να γράψουμε: $\sin^2\frac{\delta}{2}=\sin^2\left(\frac{\delta}{2}-m\pi\right)\cong\left(\frac{\delta}{2}-m\pi\right)^2$ με την προϋπόθεση ότι $\left|(\delta/2)-m\pi\right|\ll 1\ [\mathrm{rad}]$. Επομένως θα είναι:

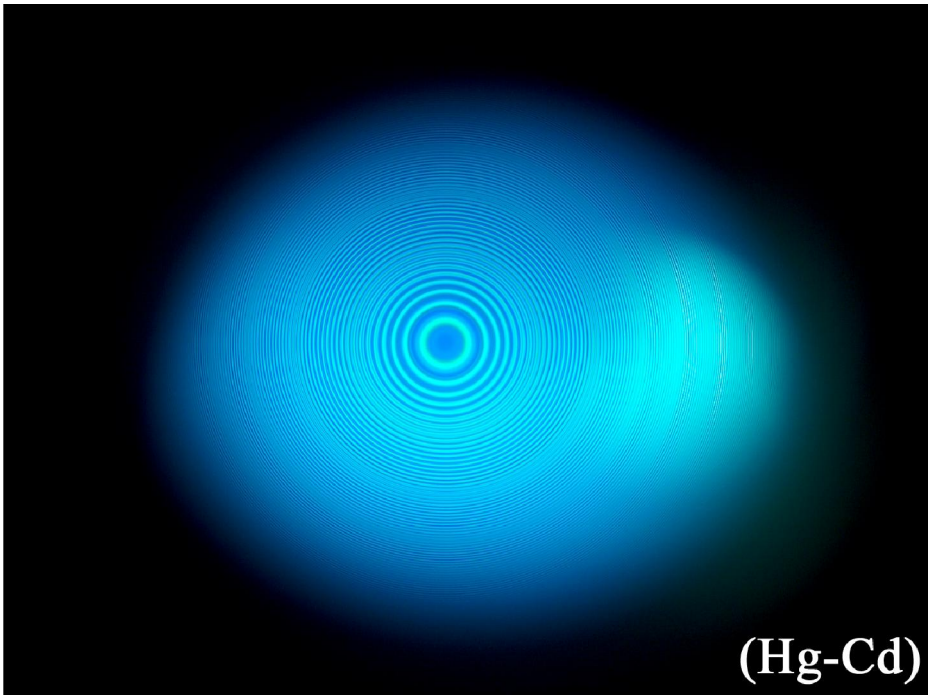
$$I_t=\frac{I_{t\max}}{1+F\sin^2(\delta/2)}\simeq\frac{I_{t\max}}{1+F\left(\frac{\delta}{2}\text{-}m\pi\right)^2}=I_{t\max}\frac{1/F}{1/F+\left(\frac{\delta}{2}\text{-}m\pi\right)^2}$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι το προφίλ της κατανομής της έντασης για κάθε κροσσό είναι Λορεντζιανής (Lorentzian) μορφής (πολύ λεπτού πάχους κροσσοί) με την προϋπόθεση όπως ήδη έχουμε αναφέρει ότι $R_1\to 1$ (βλ. (Σχ. 6.8.2.2) και (Εικ. 6.8.2.5α)). Αν βέβαια η R_1 έχει πολύ μικρή τιμή, τότε η κατανομή της έντασης των κροσσών θα είναι συνημιτονική.

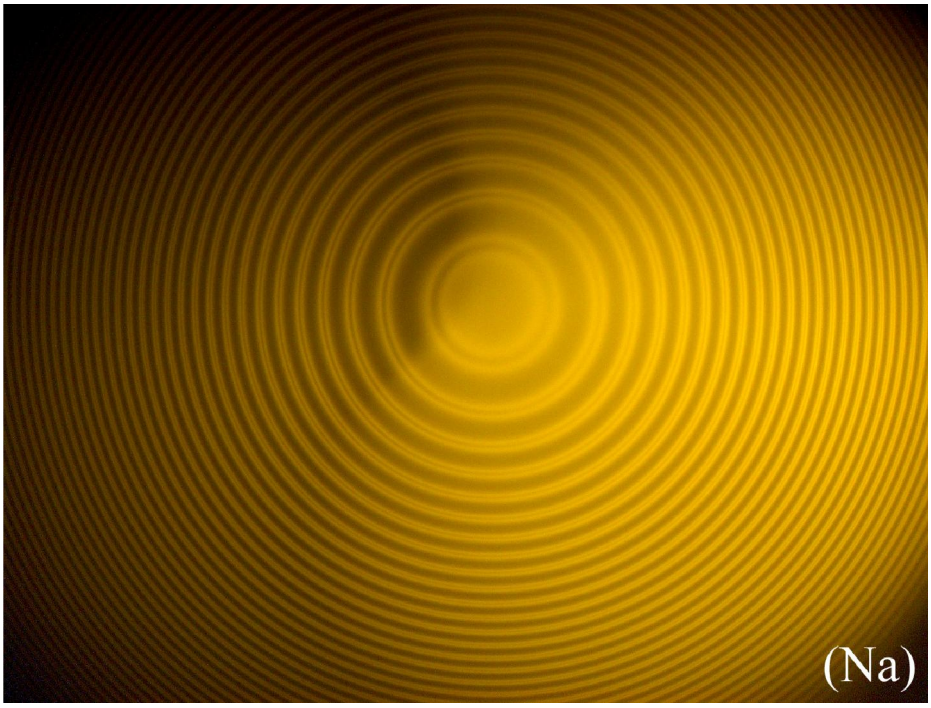
Στην περιοχή του προτύπου συμβολής που φαίνεται με γωνία θ, η συχνότητα των κροσσών μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: $\sin^2(\delta/2)=\sin^2\left[\left(2\pi/\lambda_0\right)d\cos\theta\right]=$ $[\left(\delta=2\beta+2\gamma\right)$ και $\gamma\simeq 0]=\sin^2 2\pi\nu$ όπου $\nu=d\cos\theta/\lambda_0$ η χωρική συχνότητά τους, η οποία εξαρτάται από την απόσταση d των 'κατόπτρων' του συμβολόμετρου και το μ.κ. λ_0 της φωτίζουσας πηγής. Η απόσταση d στα Fabry-Perot λαμβάνεται από λίγα χιλιοστά έως αρκετά εκατοστά. Τότε ο λόγος d/λ_0 (άρα και η συχνότητά τους για $\theta=$ σταθ.) γίνεται πολύ μεγάλος με συνέπεια οι κροσσοί να είναι πολύ πυκνοί μεταξύ τους και έξω από το διακριτικό όριο του ματιού $\nu\simeq 1/10$ (βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός (ΠΑΡ/ΜΑ 2)). Τότε αντί για φακό και πέτασμα η παρατήρησή τους γίνεται μέσω τηλεσκοπίου προσαρμοσμένου στο άπειρο το οποίο διαθέτει την κατάλληλη διακριτική ικανότητα και μεγέθυνση.

γ) Φασματοσκοπία μέσω του συμβολομέτρου Fabry-Perot. Διακριτικό όριο και διακριτική ικανότητα

Στην περίπτωση που η φωτίζουσα πηγή είναι μονοχρωματική, τότε το πρότυπο συμβολής μέσω του συμβολόμετρου θ' αποτελείται αποκλειστικά από ένα σύστημα συγκεντρικών κροσσών σαν αυτό που φαίνεται στην (Εικ. 6.8.2.5α). Επειδή όμως η διαφορά φάσης δ είναι συνάρτηση του λ_0, τότε αν η φωτίζουσα πηγή είναι πολυχρωματική, στο πρότυπο θα εμφανίζονται διακριτά μεταξύ τους και ασύμφωνα συστήματα κροσσών που θα οφείλονται στα διαφορετικά μ.κ. Ένα τέτοιο πρότυπο φαίνεται στην (Εικ. 6.8.2.6α) όπου τα εμφανιζόμενα 'διακροτήματα' οφείλονται στη διαδοχική 'επαλληλία' των κροσσών που αντιστοιχούν σε διαφορετικά μ.κ.



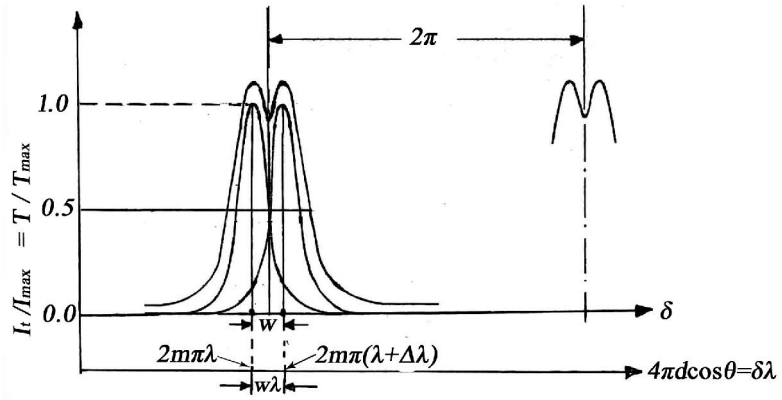
(Εικ. 6.8.2.6α)



(Εικ. 6.8.2.6β)

Πρόκειται για πρότυπο που προέκυψε από φωτισμό του συμβολόμετρου με φασματική λυχνία Hg-Cd. Επίσης στην (Εικ. 6.8.2.6β) έχουμε τη δυνατότητα να δούμε την ανάλυση που προκαλεί το συμβολόμετρο των Fabry-Perot όσον αφορά τις δύο γραμμές από τις οποίες αποτελείται το φως που εκπέμπει η λυχνία του Na. Τα δύο εμφανιζόμενα πρότυπα είναι σαφώς μετατοπισμένα μεταξύ τους και αντιστοιχούν στα μ.κ. $\lambda_{D_1} = 589.593\text{nm}$ και $\lambda_{D_1} = 588.996\text{nm}$. Επίσης εμφανίζουν διαφορά στην ένταση, η οποία οφείλεται στη διαφορά έντασης των δύο εκπεμπόμενων από την πηγή γραμμών. Στον εντοπισμό των κροσσών διαφορετικών μ.κ. σε διαφορετικές θέσεις οφείλεται τελικά η αναλυτική ικανότητα του συμβολόμετρου των Fabry-Perot όσον αφορά τη διάκριση δύο ακτινοβολιών που διαφέρουν κατά $\Delta\lambda$ ως προς το μ.κ. Παρόμοια διαδικασία έχουν τη δυνατότητα να επιτελέσουν τα φράγματα περίθλασης (βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός (§ 7.6.4)) καθώς και τα πρίσματα (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός (§ 4.4))

Κατ' αρχή θα πρέπει να καθορίσουμε ένα κριτήριο με βάση το οποίο δύο κροσσοί οι οποίοι οφείλονται σε διαφορετικά μ.κ. και σχεδόν υπερκαλύπτουν ο ένας τον άλλο στο πρότυπο συμβολής, θα λέμε ότι μόλις ξεχωρίζουν ή ότι είναι μόλις διακριτοί μεταξύ τους. Η διαδικασία που θ' ακολουθήσουμε, είναι παρόμοια με αυτή της εφαρμογής του κριτηρίου του Reyleigh όσον αφορά το διαχωρισμό δύο



(Σχ. 6.8.2.7)

φασματικών γραμμών που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους (επικάλυψη των κατανομών των εντάσεών τους) και προήλθαν από την ανάλυση μέσω φράγματος περίθλασης ή πρίσματος (βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός (§ 7.6.4)). Η εφαρμογή του κριτηρίου για την περίπτωση της ανάλυσης μέσω του συμβολόμετρου Fabry-Perot έχει ως εξής: Δύο κροσσοί ίσης έντασης και διαφορετικού μ.κ. θα είναι μόλις διακριτοί μεταξύ τους όταν τα μέγιστά τους (από άποψη διαφοράς φάσης), απέχουν όσο το πλάτος στο μισό (το εύρος) w του καθενός. Στο (Σχ. 6.8.2.7) βλέπουμε δύο κροσσούς τάξης m με μ.κ. λ και $\lambda + \Delta\lambda$. Τότε μπορούμε να πούμε ότι το πλά-

τος στο μισό (εύρος) w το οποίο σύμφωνα με τη (σχ. 6.8.2.14) είναι ίσο με $4/\sqrt{F}$ (όπου $F = 4R_1/(1-R_1)^2$ και R_1 η ανακλαστικότητα της μιας ενδοεπιφάνειας), παριστάνει την ελάχιστη αυξητικότητα της φάσης δ (δηλ. $\Delta\delta_{min}$) προκειμένου να είναι διακριτοί δύο διπλανοί κροσσοί. Στην πράξη αυτό συνιστά – όπως είναι δυνατόν να δούμε από το (Σχ. 6.8.2.7) – το ότι τελικά η συνολική ένταση του φωτός σαν άθροισμα των εντάσεων των δύο κροσσών, είναι μία κατανομή η οποία στο κέντρο της έχει ένα σαφές ελάχιστο (όχι μηδενικό), τη φωτοαντίθεση της οποίας σε σχέση με τα δύο διπλανά μέγιστα μπορεί ν' αντιληφθεί το μάτι μας ή ένα καταγραφικό όργανο. Μ' αυτόν τον τρόπο ξεχωρίζουμε σαν δύο τους κροσσούς. Για την περίπτωση που $\delta > w$, τότε οι κροσσοί είναι σαφώς διαχωρισμένοι. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο όταν $\delta < w$. Τότε η κατανομή του αθροίσματος των εντάσεων των δύο διπλανών κροσσών εμφανίζει ένα μόνο μέγιστο, γεγονός το οποίο δεν μπορεί ν' αναδείξει την ύπαρξη των δύο κροσσών. Επομένως θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα συμβολόμετρο με μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα.

Την έννοια της ***διακριτικής ικανότητας*** $\mathcal{R}$ (ή ***διακριτικής ισχύος***) (***Resolving power)*** ή ***χρωματικής διακριτικής ικανότητας (chromatic resolving power)***, τη χρησιμοποιήσαμε σε δύο περιπτώσεις κατά τη μελέτη της αναλυτικής ικανότητας την οποία διαθέτουν ένα φράγμα περίθλασης ή ένα πρίσμα. Η διακριτική ικανότητα σχετίζεται με το ***διακριτικό όριο (resolution limit)*** $(\Delta\lambda)_{min}$ του εκάστοτε οπτικού αναλυτικού στοιχείου, που είναι η ελάχιστη διαφορά μ.κ. $(\Delta\lambda)_{min}$ η οποία μπορεί να διακριθεί σε ορισμένη πάντα περιοχή του φάσματος γύρω από ένα μ.κ. λ. Η $\mathcal{R}$ ορίζεται από το λόγο $\mathcal{R} = \lambda/(\Delta\lambda)_{min} = \lambda/\Delta\lambda$. Από φυσική άποψη, εφόσον είναι γνωστή η $\mathcal{R}$, τότε στην περιοχή του μ.κ. λ του φάσματος θα είναι δυνατόν να διακριθούν δύο γραμμές των οποίων τα μ.κ. διαφέρουν κατά $\Delta\lambda$. Επομένως όσο μεγαλύτερη τιμή έχει η $\mathcal{R}$, τόσο μικρότερη θα είναι η $\Delta\lambda$.

Για τον υπολογισμό της διακριτικής ικανότητας $\mathcal{R}$ του συμβολόμετρου των Fabry-Perot ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Θεωρούμε κατ' αρχή ότι $\delta = 2m\pi$. Όμως $\delta = 2\beta + 2\gamma = (4\pi dn\cos\theta/\lambda) + 2\gamma = 2m\pi$. Επομένως $2dn\cos\theta + \gamma\lambda/\pi = m\lambda$ και επειδή η γ είναι κατά τα γνωστά πολύ μικρή, μπορεί να παραλειφθεί. Τελικά $m\lambda = 2dn\cos\theta$. Για το συμβολόμετρο τα d, n είναι σταθερά και για $\theta =$ σταθ. θα έχουμε: $m\lambda =$ σταθ. Διαφορίζοντας την τελευταία σχέση βρίσκουμε: $\Delta m \cdot \lambda + m \cdot \Delta\lambda = 0$. Οπότε:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = -\frac{m}{\Delta m} \qquad (6.8.2.16)$$

Μπορούμε να παραλείψουμε το μείον από την τελευταία σχέση δεδομένου ότι αυτό το οποίο δηλώνει είναι η αύξηση της τάξης m όταν ελαττώνεται το μ.κ. λ. Γνωρίζουμε επίσης ότι όταν η μεταβολή της φάσης $\Delta\delta$ είναι η 2π τότε η μεταβολή της τάξης Δm είναι ίση με 1. Επομένως:

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta m} = 2\pi \tag{6.8.2.17}$$

Τότε από τις δύο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2\pi m}{\Delta\delta} \tag{6.8.2.18}$$

Με τη βοήθεια των (σχ. 6.8.2.14,15) ισχύει: $\frac{2\pi}{\Delta\delta} = \frac{2\pi}{w} = \mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2}\left(w = \frac{4}{\sqrt{F}}\right)$ και για κάθετη πρόσπτωση $2dn = m\lambda$ οπότε $m = 2dn/\lambda$. Άρα η (σχ. 6.8.2.18) γίνεται:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \mathcal{F}\cdot m = \mathcal{F}\frac{2nd}{\lambda} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2}\cdot m \tag{6.8.2.19}$$

όπου: $F = 4R_1/(1-R_1)^2$.

Παράδειγμα

Αν τα κάτοπτρα στο συμβολόμετρο των Fabry-Perot απέχουν κατά $d = 10\text{mm}$ και $n = 1,\ \lambda = 550\text{nm}$, και $R_1 = 0.85$ τότε θα έχουμε $F = 151$. Οπότε από την $\mathcal{R} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2}\cdot\frac{2d}{\lambda}$ βρίσκουμε: $\mathcal{R} \simeq 700.000$. Και επειδή $\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, στην περιοχή του μ.κ. $\lambda = 550\text{nm}$ θα έχουμε: $\Delta\lambda \simeq 7.85\times10^{-4}\text{nm}$. Δηλαδή θα έχουμε τη δυνατότητα να διακρίνουμε δύο γραμμές των οποίων τα μ.κ. διαφέρουν κατά $7.85\times10^{-4}\text{nm}$. Το αποτέλεσμα σημαίνει ότι το συγκεκριμένο όργανο διαθέτει υψηλή διακριτική ικανότητα.

Ελεύθερη φασματική περιοχή

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι αν η φωτίζουσα πηγή περιλαμβάνει δύο μ.κ. $\lambda, \lambda - \Delta\lambda$ και $\Delta\lambda > (\Delta\lambda)_{\min}$ όπου $(\Delta\lambda)_{\min}$ το ελάχιστο διακριτό όριο, τότε οι κροσσοί τάξης m που αντιστοιχούν στα δύο μ.κ. είναι σαφώς διαχωρισμένοι μεταξύ

τους και άρα διακριτοί. Όσο όμως μεγαλώνει η διαφορά μεταξύ των δύο μ.κ. τόσο θ' αυξάνεται και η πιθανότητα η θέση του κροσσού μ.κ. λ τάξης m να συμπέσει με τον κροσσό μ.κ. $\lambda - \Delta\lambda$ τάξης $m+1$. Τότε θα έχουμε το φαινόμενο της επικάλυψης των διαφορετικών τάξεων, το οποίο τις περισσότερες φορές είναι ανεπιθύμητο. Στην οριακή περίπτωση για την οποία έχουμε επικάλυψη θα ισχύει η σχέση: $m\lambda = (m+1)(\lambda - \Delta\lambda)$, από την οποία βρίσκουμε ότι:

$$\Delta\lambda = (\Delta\lambda)_{fsr} = \frac{\lambda}{m+1} \simeq \frac{\lambda}{m} \qquad (6.8.2.20)$$

επειδή η τιμή της m είναι πολύ μεγάλη.

Η $(\Delta\lambda)_{fsr}$ ονομάζεται ***ελεύθερη φασματική περιοχή (free spectral range)***. Από φυσική άποψη μας δίνει την μεγαλύτερη δυνατή διαφορά την οποία θα μπορούσαν να έχουν δύο μ.κ. στην περιοχή του μ.κ. λ του φάσματος, προκειμένου να μην έχουμε επικάλυψη των κροσσών τους τάξης m και $m+1$. Η (σχ. 6.8.2.20) είναι δυνατόν να παραχθεί και από τη (σχ. 6.8.2.18) με την αντικατάσταση $\Delta\delta = 2\pi$. Επειδή για κάθετη πρόσπτωση ισχύει η σχέση $2dn = m\lambda$, τότε από τη (σχ. 6.8.2.20) βρίσκουμε:

$$(\Delta\lambda)_{fsr} = \frac{\lambda^2}{2nd} \qquad \text{ή} \qquad (\Delta\nu)_{fsr} = \frac{c}{2nd} \qquad (6.8.2.21)$$

(επειδή $c = \lambda\nu$ και $\Delta\lambda = -\Delta\nu/\nu^2$). Βλέπουμε δηλαδή ότι η ελεύθερη φασματική περιοχή είναι σταθερή και ανεξάρτητη της τάξης m. Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα για το οποίο $d = 10\text{mm}$, $n = 1.0$ και $\lambda = 550\text{nm}$, βρίσκουμε $(\Delta\lambda)_{fsr} \simeq 0.015\text{nm}$. Με τη βοήθεια των (σχ. 6.8.2.19,21) βλέπουμε ότι προκειμένου ν' αυξήσουμε τη διακριτική ικανότητα $\mathcal{R}$ του συμβολόμετρου (δηλ. να καταστήσουμε μικρότερο το διακριτικό όριο $(\Delta\lambda)_{min}$ αυξάνοντας την απόσταση d των κατόπτρων του), ταυτόχρονα ελαττώνουμε την ελεύθερη φασματική περιοχή, καθιστώντας πιο πιθανή τη δυνατότητα επικάλυψης των τάξεων δύο διπλανών προς διάκριση μ.κ. στην εξεταζόμενη περιοχή του φάσματος που επιθυμούμε να αναλύσουμε φασματοσκοπικά. Η προσπάθειά μας λοιπόν θα είναι προς την κατεύθυνση: Το $(\Delta\lambda)_{min}$ (διακριτικό όριο) να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο, ενώ η $(\Delta\lambda)_{fsr}$ (ελεύθερη φασματική περιοχή) όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Προκειμένου λοιπόν από πρακτική άποψη ν' αποφύγουμε την επικάλυψη των τάξεων μεταξύ δύο προς ανάλυση φασματικών γραμμών μ.κ. λ_j και λ_i θα πρέπει να ισχύει:

$$\lambda_j - \lambda_i < (\Delta\lambda)_{fsr} / 2 \qquad (6.8.2.22)$$

Ανεπιθύμητες φασματικές γραμμές οι οποίες πιθανόν να μας προκαλούσαν σύγχυση εμφανιζόμενες στην προς εξέταση φασματική περιοχή, είναι δυνατόν ν' αποφευχθούν με προκαταρκτική ανάλυση του φάσματος μέσω φραγμάτων ή πρισμάτων. Από τα προαναφερόμενα γίνεται κατανοητό ότι η ανάλυση μέσω των συμβολόμετρων Farby-Perot (λόγω της υψηλής τους διακριτικής ικανότητας) προσανατολίζεται προς τη φασματοσκοπική μελέτη κυρίως της λεπτής υφής των φασματικών γραμμών.

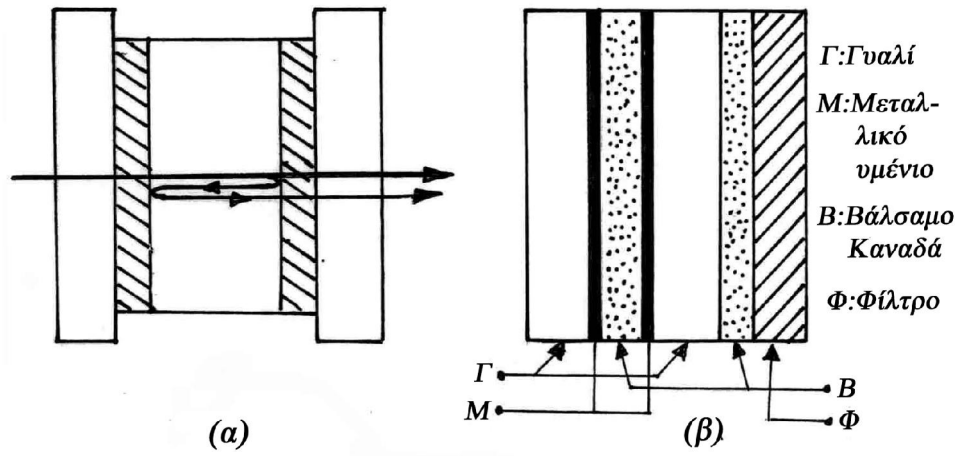
Τέλος, με τη βοήθεια των (σχ. 6.8.2.19,21) βρίσκουμε ότι:

$$\frac{(\Delta\lambda)_{fsr}}{(\Delta\lambda)_{min}} = \mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} \qquad (6.8.2.23)$$

η οποία ταυτίζεται λογικά με τον ορισμό του μεγέθους της λεπτότητας των κροσσών συμβολής, όπως αυτός δόθηκε μέσω της (σχ. 6.8.2.15).

6.8.3 *Συμβολομετρικά φίλτρα*

Τα φίλτρα αυτού του είδους, επιτρέπουν δια μέσου τους τη διέλευση μιας πολύ στενής φασματικής περιοχής της τάξης των $5-10\text{nm}$. Για το λόγο αυτό η διερχόμενη ακτινοβολία μπορεί να θεωρηθεί μονοχρωματική. Η αρχή της λειτουργίας



(Σχ. 6.8.3.1)

τους είναι αυτή ενός συμβολομέτρου Fabry-Perot. Ας υποθέσουμε ότι δύο γυάλινες πλάκες είναι επιστρωμένες εσωτερικά (Σχ. 6.8.3.1α) από μεταλλικά υμένια τα ο-

ποία κατά τα γνωστά αυξάνουν κατά πολύ την ανακλαστικότητα των επιφανειών. Απέχουν μεταξύ τους απόσταση d και ο χώρος αυτός μπορεί να είναι κενός ή να καταλαμβάνεται από διαφανές διηλεκτρικό ορισμένου δ.δ. Θεωρούμε τώρα ότι στη μια από τις εξωτερικές επιφάνειες του συστήματος προσπίπτει κάθετα παράλληλη δέσμη λευκού φωτός. Τότε για κάθε μονοχρωματική συνιστώσα του θα υπάρξουν πολλαπλές ανακλάσεις στο εσωτερικό της κοιλότητας και κάτω από ορισμένες συνθήκες δυνατότητα συμβολής. Θα έχουμε μέγιστα συμβολής τάξης m για τις διερχόμενες διαταραχές μ.κ. λ όταν ισχύει η σχέση:

$$2nd = m\lambda \quad m = 1, 2, 3, ... \tag{6.8.3.1}$$

όπου n ο δ.δ. του υλικού που βρίσκεται ενδιάμεσα των κατοπτρικών επιφανειών και d το πάχος του. Για τα υπόλοιπα μ.κ. η συμβολή θα είναι καταστροφική (ελάχιστα συμβολής) και οι αντίστοιχες συνιστώσες του φωτός δεν θα αναδύονται από το φίλτρο. Αν το d είναι αρκετά μεγάλο, η συνθήκη της (σχ. 6.8.3.1) θα πληρούται για αρκετά μ.κ. των οποίων οι ακτινοβολίες διαπερνούν το φίλτρο. Είναι δυνατόν όμως ελαττώνοντας την απόσταση αυτή (μερικά δέκατα του μικρού για την ορατή περιοχή του φάσματος) τα μ.κ. που θα συντονιστούν να είναι ελάχιστα.

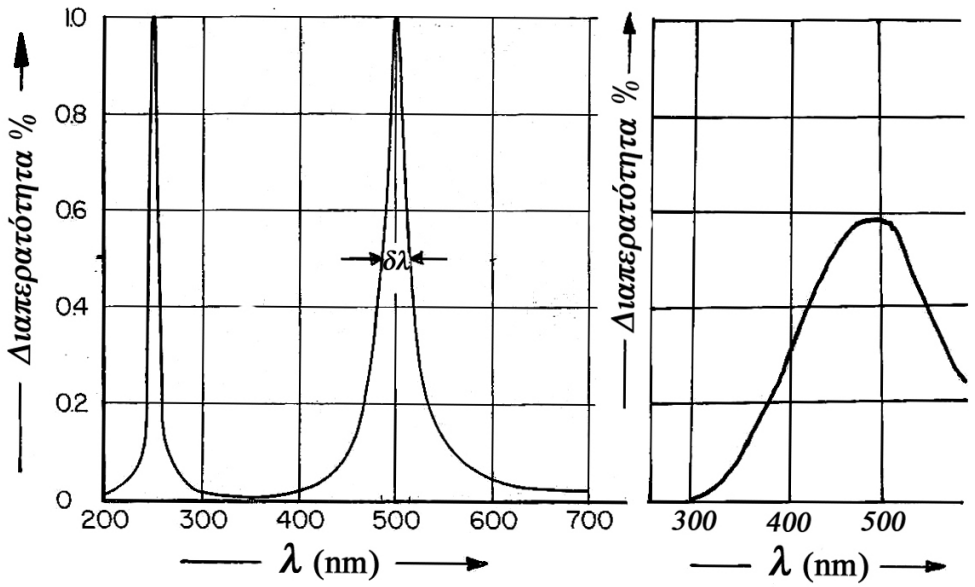
Έστω π.χ. ότι ο ενδιάμεσος χώρος του φίλτρου είναι ο αέρας με $n = 1.0$ και θα θέλαμε να προκύψει συντονισμός για την τάξη $m = 1$ τουλάχιστον για ακτινοβολία με κεντρικό μ.κ. $\lambda = 500\text{nm}$ δηλ. στην πράσινη περιοχή του φάσματος. Τότε αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στη (σχ. 6.8.3.1), βρίσκουμε ότι το πάχος της κοιλότητας θα πρέπει να είναι $d = 0.25\mu\text{m}$, δηλ. το μισό του μήκους κύματος. Για το συγκεκριμένο όμως πάχος και για $m = 2$ από την ίδια σχέση βλέπουμε ότι συντονίζεται και η ακτινοβολία με μ.κ. $\lambda_2 = 250\text{nm}$ η οποία ανήκει στην υπεριώδη περιοχή του Η/Μ φάσματος. Ακτινοβολίες που προκύπτουν για $m > 2$ δεν μπορούν να διαδοθούν γιατί συνήθως απορροφούνται από το οξυγόνο και το άζωτο του αέρα. Καμπύλες της διαπερατότητας, των δύο διαδιδόμενων διαταραχών βλέπουμε στο (Σχ. 6.8.3.2α) για τιμή ανακλαστικότητας των κατόπτρων $R_1 = 0.8$ και $d = 0.25\mu\text{m}$. Το εύρος $\delta\lambda$ της διερχόμενης ακτινοβολίας στην περιοχή του $\lambda = 550\text{nm}$ είναι περίπου 30nm. Το τελευταίο προκύπτει ως εξής: Γνωρίζουμε ότι $\delta = 2\beta + 2\gamma$ όπου $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} nd\cos\theta_t$, παριστάνει τη συνολική διαφορά φάσης μεταξύ δύο διαδοχικών διαβάσεων μιας διαταραχής, κατά τη διαδικασία των πολλαπλών ανακλάσεων στο εσωτερικό της κοιλότητας. Και επειδή $\gamma \simeq 0,\ n \simeq 1.0,\ \cos\theta_t \simeq 1$ θα έχουμε $\delta = 4\pi d/\lambda$. Διαφορίζοντας την τελευταία σχέση βρίσκουμε κατ' απόλυτη τιμή: $\Delta\delta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} 4\pi d$. Και αν θέλουμε η $\Delta\delta$ να παριστάνει το πλάτος στο μισό της $I_t / I_{t\,\max}$

θα είναι $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = w = 2\delta_{1/2}$ (Σχ. 6.8.2.3). Και με τη βοήθεια της (σχ. 6.8.2.12) αποδεικνύεται (σχ. 6.8.2.14) ότι: $w = \Delta\delta = 4/\sqrt{F}$, όπου κατά τα γνωστά: $F = 4R_1/(1-R_1)^2$ και R_1 η ανακλαστικότητα κατά τη μία ανάκλαση (σχ. 6.8.2.6). Επομένως $\Delta\delta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}4\pi d = \frac{4}{\sqrt{F}}$. Από την οποία τελικά:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{\pi d}\sqrt{\frac{1}{F}} \qquad (6.8.3.2)$$

Και για $R_1 = 0.8$, $d = 0.25\mu\text{m}$ και $\lambda = 550\text{nm}$ βρίσκουμε: $\Delta\lambda \simeq 35\text{nm}$.

Το πρόβλημα της εξάλειψης της ανεπιθύμητης συνιστώσας στο υπεριώδες ($\lambda_2 = 250\text{nm}$) λύνεται με τη βοήθεια ενός πράσινου φίλτρου με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, το οποίο παρεμβάλλεται μετά το τελευταίο στοιχείο της κοιλότητας συντονισμού (Σχ. 6.8.3.1β). Το φίλτρο αυτό αν και ευρείας φασματικής περιοχής,



(Σχ. 6.8.3.2)

Σημείωση

Στα συμβολομετρικά φίλτρα παλαιάς τεχνολογίας, ο ενδιάμεσος χώρος μεταξύ της κοιλότητας αποτελούνταν από βάλσαμο του Καναδά με $n = 1.54$. Σε υψηλή σχετικά θερμοκρασία ρευστό και στη συνήθη ($\theta \simeq 20^0 C$) στερεό, συγκρατούσε τα δύο κάτοπτρα στη συγκεκριμένη τους θέση. Με το ίδιο υλικό επικολλούνταν και το έγχρωμο φίλτρο στο ένα άκρο της κοιλότητας (Σχ. 6.8.3.1β).

απορροφά τελείως – όπως φαίνεται από την καμπύλη διαπερατότητας του (Σχ. 6.8.3.2β) – ακτινοβολίες με μ.κ. μικρότερα των 300nm και επιτρέπει τη διέλευση με μια σχετική ελάττωση του πλάτους τους αυτών μέχρις τα 650nm από όπου και μετά τα απορροφά πάλι δραστικά. Επειδή το μέγιστο της διαπερατότητάς του είναι στα 500nm αυτό σημαίνει ότι από το συμβολομετρικό φίλτρο τελικά θα περάσει η επιθυμητή ακτινοβολία μ.κ. $\lambda_{\max} = 500\text{nm}$ με εύρος ζώνης $\Delta\lambda = 30\text{nm}$. Κατά την χρησιμοποίηση ενός συμβολομετρικού φίλτρου, η είσοδος του φωτός θα πρέπει να γίνεται από τη μεριά του φίλτρου της ευρείας φασματικής περιοχής. Το γεγονός αυτό θα περιορίζει εξ αρχής το ανεπιθύμητο εύρος συχνοτήτων που το τελευταίο αποκόπτει.

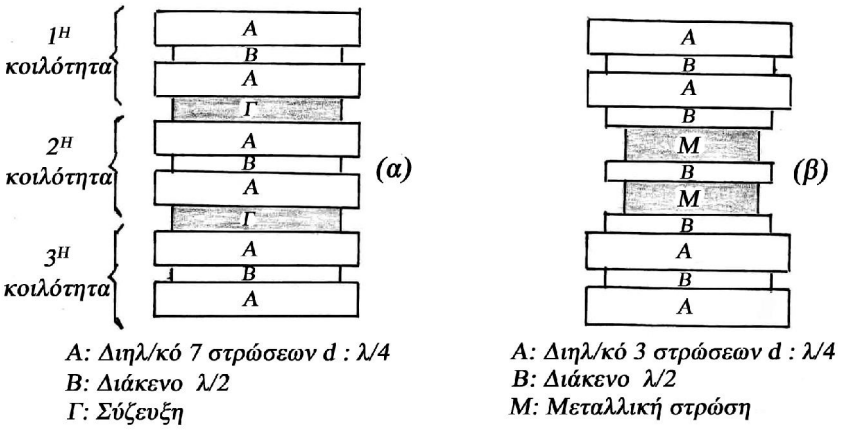
Για τα σύγχρονης τεχνολογίας συμβολομετρικά φίλτρα η αύξηση της ανακλαστικότητας των κοιλοτήτων δεν γίνεται πλέον με επίστρωση μεταλλικών υμενίων αλλά με πολλαπλότητα ζευγών διηλεκτρικών στρώσεων . Κάθε επαναλαμβανόμενο ζεύγος αποτελείται από υλικά ορισμένου πάχους και δ.δ. n_H και n_L όπου $n_H > n_L$ έτσι ώστε: $d_H n_H = d_L n_L = \lambda_0/4$. Κάτω από αυτές τις συνθήκες αποδεικνύεται ότι για ένα σύνολο N ζευγών $H-L$ υμενίων η ανακλαστικότητα R δίνεται από τη σχέση (βλ. § 6.8.4 (σχ. 6.8.4.13)):

$$R_1 = \left[\frac{1 - \left(\frac{n_H}{n_L} \right)^{2N}}{1 + \left(\frac{n_H}{n_L} \right)^{2N}} \right]^2 \qquad (6.8.3.3)$$

Αν π.χ. $N = 7$, $n_H = 2.32$ (ZnS_2) και $n_L = 1.38$ (MgF_2) βρίσκουμε ότι $R = 0.997$. Επειδή κατά τα γνωστά το εύρος ζώνης $\Delta\lambda$ εξαρτάται από τον παράγοντα $\sqrt{F}$ (σχ. 6.8.3.2) και ο F από την ανακλαστικότητα R_1 του κάθε κατόπτρου, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η αύξηση της R_1 θ' αντιστοιχεί σ' ελάττωση του $\Delta\lambda$ της εξερχόμενης από το συμβολομετρικό φίλτρο δέσμης.

Ένας δεύτερος παράγοντας ελάττωσης του $\Delta\lambda$ ή γενικά του ελέγχου της μορφής της φασματικής κατανομής της ακτινοβολίας εξόδου από το φίλτρο, είναι ο αριθμός των κοιλοτήτων συντονισμού που μπορούν να συμπεριληφθούν. Στο (Σχ. 6.8.3.3α) βλέπουμε τη διάταξη των επιστρώσεων ενός συμβολομετρικού φίλτρου που περιλαμβάνει συνολικά τρεις κοιλότητες συντονισμού. Το εύρος ζώνης στην περίπτωση αυτή μπορεί να λάβει μέχρις και την τιμή $\Delta\lambda \simeq 1\text{nm}$ ή ακόμη μικρότερη. Πρόκειται για τα συμβολομετρικά φίλτρα Laser που χρησιμοποιούνται για την απομόνωση των γραμμών των πηγών Laser (π.χ. για κάθε μία από τις γραμμές του Laser Ar^+ (Ιόντων Αργού). Επίσης μια τυπική τιμή $\Delta\lambda$ ενός καλού συμβολομετρι-

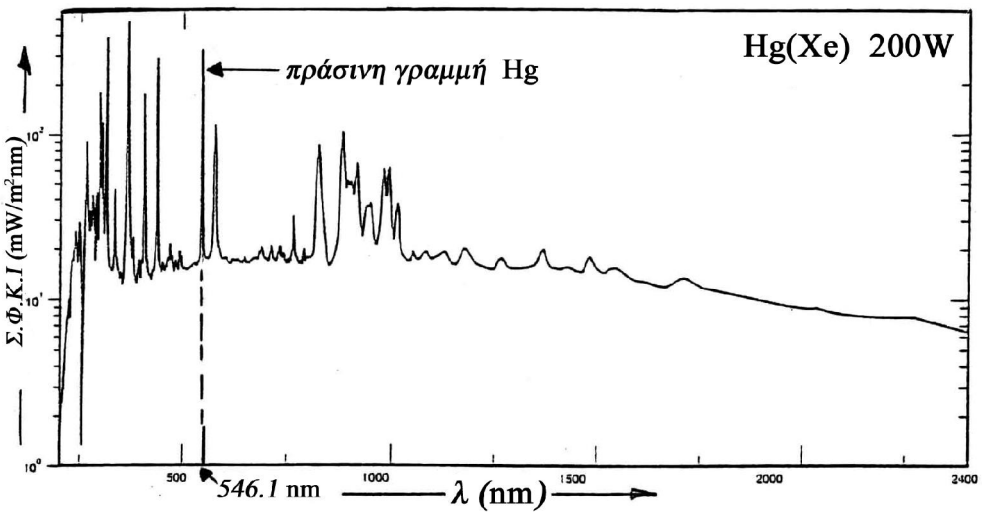
κού φίλτρου για την απομόνωση των γραμμών των φασματικών λυχνιών μεταξύ τους ή από συνεχές υπόβαθρο ακτινοβολίας είναι $\Delta\lambda \simeq 10\text{nm}$. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, για τις περισσότερες των περιπτώσεων ανεξάρτητα της τεχνολογίας κατασκευής των φίλτρων, στις κοιλότητές τους συντονίζονται ακτινοβολίες με μ.κ. περισσότερα του ενός. Το πρόβλημα της αποκοπής των ανεπιθύμητων κατανομών θα μπορούσε να λυθεί – όπως έχει ήδη λεχθεί – με τη χρήση χαμηλοπερατών ή υψηλοπερατών εγχρώμων γυάλινων φίλτρων. Το μειονέκτημα όμως με τα τελευταία είναι ότι αφ' ενός μεν έχουν μικρούς συντελεστές διαπερατότητας και κατά δεύτερο λόγο δεν μπορούν να κατασκευαστούν φίλτρα με ελεγχόμενες θέσεις διαπερατότητας. Το πρόβλημα λύνεται με τη βοήθεια των λεγόμενων ***επαγόμενων φίλτρων διαπερατότητας (induced transmission filters).*** Τα τελευταία (Σχ. 6.8.3.3β) αποτελούνται από συστήματα πολλαπλών επιστρώσεων υμενίων διηλεκτρικών και μετάλλων. Είναι σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να ενισχύουν την επιθυμητή ζώνη διέλευσης και ν' αποκόπτουν τις υπόλοιπες.



(Σχ. 6.8.3.3)

Από πρακτική άποψη θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι η εξερχόμενη από το συμβολομετρικό φίλτρο ακτινοβολία έχει σαν κεντρικό μ.κ. της φασματικής της κατανομής αυτό για το οποίο σχεδιάστηκε αρχικά, εφόσον η προσπίπτουσα δέσμη σ' αυτό πέφτει κάθετα. Η προσπίπτουσα με κλίση, θα έχει σαν αποτέλεσμα τη μετατόπιση σε κάποιο βαθμό του κεντρικό προς άλλα μ.κ. Το γεγονός αυτό μπορεί να παρατηρηθεί εύκολα όταν τοποθετήσουμε μπροστά στο μάτι μας ένα συμβολομετρικό φίλτρο και δούμε δια μέσου του μια κάπως μακρινή πηγή λευκού φωτός. Όταν το φίλτρο είναι κάθετο στη γραμμή όρασης, τότε βλέπουμε να περνάει από αυτό η ακτινοβολία (χρώμα) για το οποίο έχει κατασκευασθεί. Αν όμως μεταβάλλουμε δραστικά την κλίση του, τότε αλλάζει έντονα και το χρώμα της διερχόμενης ακτινοβολίας. Το γεγονός οφείλεται στη φαινόμενη μεταβολή του πάχους της κοιλότητας συντονισμού.

Ένα παράδειγμα χρησιμοποίησης συμβολομετρικού φίλτρου είναι το επόμενο. Σε μια οπτική διάταξη σαν φωτίζουσα πηγή χρησιμοποιούμε μια λυχνία τόξου συνεχούς ρεύματος $(\mathrm{Hg-Xe})$ $200\mathrm{W}$, της οποίας το διάγραμμα της Σ.Φ.Κ.Ι. (Σχετικής Φασματικής Κατανομής Ισχύος) σε $\left(\mathrm{mW/m^2nm}\right)$ συναρτήσει του μ.κ. δίνεται στο (Σχ. 6.8.3.4). Από εκεί βλέπουμε ότι στο συνεχές φάσμα που οφείλεται στην εκπομπή του (Xe) και συγκεκριμένα στη ορατή περιοχή του φάσματος, συνυπάρχουν και οι φασματικές γραμμές του (Hg) των οποίων η ισχύς είναι πολύ σημαντική. Θέλουμε τελικά να φωτίσουμε ένα αντικείμενο με φως της πράσινης γραμμής του Hg. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα συμβολομετρικό φίλτρο με $\lambda_{\max} = 546.1\mathrm{nm}$. Η παρεμβολή του κάθετα σ' ένα επίπεδο μέτωπο κύμα-



(Σχ. 6.8.3.4)

τος της προαναφερόμενης φασματικής κατανομής, θ' αποκόψει αφ' ενός το συνεχές υπόβαθρο της πηγής και αφ' ετέρου τις υπόλοιπες φασματικές γραμμές που οφείλονται στον (Hg) δηλ. (Ιώδη, μπλε, κίτρινη κλπ.). Επομένως από το συμβολομετρικό φίλτρο αναδύεται ένα επίπεδο μέτωπο κύματος του οποίου όμως η φασματική κατανομή είναι αυτή της πράσινης γραμμής του (Hg). Το φίλτρο τελικά αποκόπτει συχνότητες που βρίσκονται εκτός του εύρους $\Delta\lambda \simeq 5\mathrm{nm}$ (με $\lambda_{\max} = 546.1\mathrm{nm}$) αλλά το εύρος της πράσινης γραμμής του (Hg) για λυχνία υψηλής πίεσης είναι $\Delta\lambda' \simeq 1\mathrm{nm}$ (με $l_c \simeq 0.03\mathrm{cm}$) βλ. (Πίν. 6.1.2.11).

6.8.4 *Συστήματα ζευγών λεπτών υμενίων διηλεκτρικών, για τη χρήση τους σαν κατοπτρικών επιφανειών*[*]

[*] M. V. Klein & T. E. Furtak: 'Optics'. John Willey & Sons. N.Y. (Second Edition) (1986).

Στο (Σχ. 6.8.4.1) βλέπουμε ένα σύστημα N τον αριθμό ομοίων ζευγών διηλεκτρικών υμενίων. Τα δύο διαδοχικά υμένια του ζεύγους, πάχους d_H και d_L έχουν δ.δ. για τους οποίους ισχύει $n_H > n_L$. Θέλουμε να υπολογιστεί η ανακλαστικότητα R του συστήματος για κάθετη πρόσπτωση μιας δέσμης μονοχρωματικού φωτός μ.κ. λ_0 από τον αέρα $(n = 1.0)$, έτσι ώστε για ένα σύνολο N ζευγών να έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή (ανακλαστικότητας).

Για να καταστεί αυτό το σύστημα πλήρως κατοπτρικό, θα πρέπει να ισχύει για κάθε ζεύγος υμενίων $H - L$ η συνθήκη:

$$n_H d_H = n_L d_L = \lambda_0 / 4 \tag{6.8.4.1}$$

Τότε πράγματι οι δύο ανακλώμενες διαταραχές *(1),(1')* στην πρώτη επιφάνεια H και στην ενδοεπιφάνεια $H - L$ του πρώτου ζεύγους θα εξέρχονται και θα συμβάλλουν με διαφορά φάσης μηδέν δηλ. εποικοδομητικά. Το ίδιο ακριβώς θα συμβαίνει και για όλα τα επόμενα ζεύγη των ανακλώμενων από τα διαδοχικά ζεύγη $H - L$ του συστήματος όπως φαίνεται στο (Σχ. 6.8.4.1). Το γεγονός αυτό θα οδηγεί στη μέγιστη δυνατή αύξηση του συντελεστή ανακλαστικότητας ρ του συστήματος και κατά προέκταση της ανακλαστικότητας R.

Υπολογίζουμε κατ' αρχή τον πίνακα μετασχηματισμού $\mathbf{S}$ (ανακλαστικότητας – διαθλαστικότητας) (σχ. 6.8.1.22, § 6.8.1) για ένα τυχαίο ζεύγος $H - L$. Κατά τα γνωστά θα δίνεται από τη σχέση: $\mathbf{S}_Z = \mathbf{H}_{LH}\mathbf{L}_H\mathbf{H}_{HL}\mathbf{L}_L$.

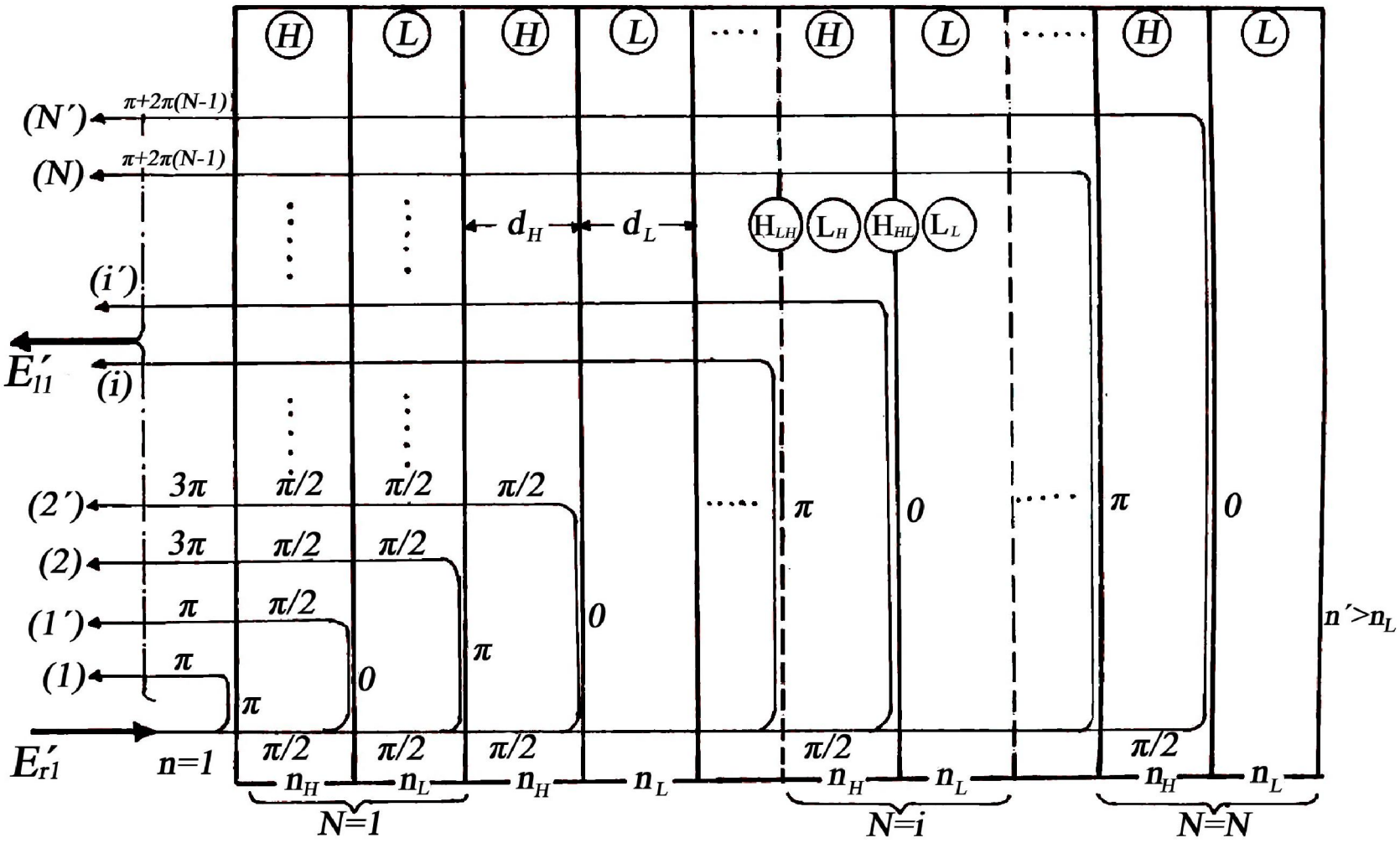
Όπου: $\mathbf{H}_{HL} = \dfrac{1}{\tau_{HL}}\begin{pmatrix} 1 & \rho_{HL} \\ \rho_{HL} & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_{LH} = \dfrac{1}{\tau_{LH}}\begin{pmatrix} 1 & \rho_{LH} \\ \rho_{LH} & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{L}_L = \mathbf{L}_H = \begin{pmatrix} e^{-i\beta} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}$ (6.8.4.2)

Και επειδή $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda_o} n_H d_H \cos\theta = \dfrac{2\pi}{\lambda_o} n_L d_L \cos\theta$ για $\theta = 0$ και $n_H d_H = n_L d_L = \lambda_0 / 4$

θα έχουμε: $\beta = \pi/2$. Τελικά: $\mathbf{L}_L = \mathbf{L}_H = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, οπότε:

$$\mathbf{S}_Z = \frac{-1}{\tau_{LH}\tau_{HL}}\begin{pmatrix} 1+\rho_{LH}^2 & 2\rho_{LH} \\ 2\rho_{LH} & 1+\rho_{LH}^2 \end{pmatrix} \tag{6.8.4.3}$$

Στην περίπτωση που προσθέσουμε στο σύστημα του ενός ζεύγους υμενίων ένα δεύτερο, τότε ο πίνακας μετασχηματισμού θα είναι το γινόμενο $\mathbf{S}_Z\mathbf{S}_Z = (\mathbf{S}_Z)^2$ ή:


H
L
H
L
H
L
H
L
(N′)
(N)
(i′)
(i)
(2′)
(2)
(1′)
(1)
π+2π(N-1)
π+2π(N-1)
d_H
d_L
H_{LH}
L_H
H_{HL}
L_L
E'_{11}
E'_{r1}
n=1
3π
π/2
π
0
n′>n_L
n_H
n_L
N=1
N=i
N=N

(Σχ. 6.8.4.1)

$$\left(\mathbf{S}_Z\right)^2 = \left(\frac{-1}{\tau_{LH}\tau_{HL}}\right)^2 \begin{pmatrix} 1+6\rho_{LH}^2+\rho_{LH}^4 & 4\rho_{LH}+4\rho_{LH}^2 \\ 4\rho_{LH}4\rho_{LH}^2 & 1+6\rho_{LH}^2+\rho_{LH}^4 \end{pmatrix} \tag{6.8.4.4}$$

Επειδή όμως: $\left(1+\rho_{LH}\right)^4 = 1+4\rho_{LH}+6\rho_{LH}^2+4\rho_{LH}^3+\rho_{LH}^4$ (6.8.4.5)

και $\left(1-\rho_{LH}\right)^4 = 1-4\rho_{LH}+6\rho_{LH}^2-4\rho_{LH}^3+\rho_{LH}^4$ (6.8.4.6)

τότε η (σχ. 6.8.4.4) γίνεται:

$$\left(\mathbf{S}_Z\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\tau_{LH}\tau_{HL}}\right)^2 \begin{pmatrix} \left(1+\rho_{LH}\right)^4+\left(1-\rho_{LH}\right)^4 & \left(1+\rho_{LH}\right)^4-\left(1-\rho_{LH}\right)^4 \\ \left(1+\rho_{LH}\right)^4-\left(1-\rho_{LH}\right)^4 & \left(1+\rho_{LH}\right)^4+\left(1-\rho_{LH}\right)^4 \end{pmatrix} \tag{6.8.4.7}$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι το σύστημα αποτελείται από N συνολικά ζεύγη, τότε αποδεικνύεται ότι:

$$\left(\mathbf{S}_z\right)^N = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\tau_{LH}\tau_{HL}}\right)^N \begin{pmatrix} \left(1+\rho_{LH}\right)^{2N}+\left(1-\rho_{LH}\right)^{2N} & \left(1+\rho_{LH}\right)^{2N}-\left(1-\rho_{LH}\right)^{2N} \\ \left(1+\rho_{LH}\right)^{2N}-\left(1-\rho_{LH}\right)^{2N} & \left(1+\rho_{LH}\right)^{2N}+\left(1-\rho_{LH}\right)^{2N} \end{pmatrix} \tag{6.8.4.8}$$

Για κάθετη όμως πρόσπτωση της ακτινοβολίας, γνωρίζουμε (βλ. Κεφ. 2 Η/Μ Κύματα (ΘΕΜΑ 1)(σχ. 1.14)) ότι:

$$\rho_{ij} = \frac{n_i - n_j}{n_i + n_j} \tag{6.8.4.9}$$

Άρα : $1+\rho_{LH} = \dfrac{2n_L}{n_L+n_H}$ και $1-\rho_{LH} = \dfrac{2n_H}{n_L+n_H}$ (6.8.4.10)

Επομένως:

$$\left(\mathbf{S}_Z\right)^N = \frac{1}{2}\left(\frac{-4}{\tau_{LH}\tau_{HL}\left(n_L+n_H\right)^2}\right)^N \begin{pmatrix} n_L^{2N}+n_H^{2N} & n_L^{2N}-n_H^{2N} \\ n_L^{2N}-n_H^{2N} & n_L^{2N}+n_H^{2N} \end{pmatrix} \tag{6.8.4.11}$$

και με βάση τον ορισμό του συντελεστή ανακλαστικότητας (σχ. 6.8.1.24):

$\rho = E'_{l1} / E'_{r1} = S_{12} / S_{22}$ όπου S_{12}, S_{22} στοιχεία του πίνακα μετασχηματισμού $(\mathbf{S}_Z)^N$, θα είναι:

$$\rho = \frac{n_L^{2N} - n_H^{2N}}{n_L^{2N} + n_H^{2N}} \tag{6.8.4.12}$$

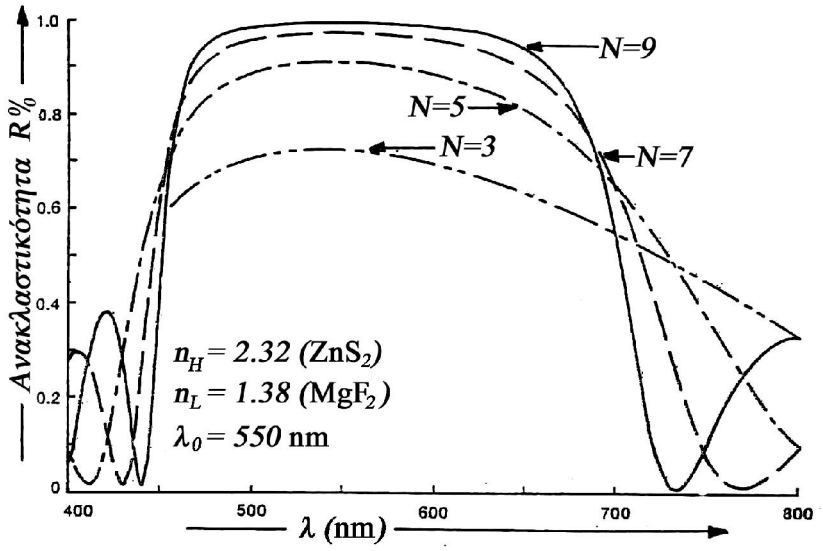
Τελικά με βάση τη (σχ. 6.8.1.25), η ανακλαστικότητα $R = |\rho|^2$ του συστήματος των N ζευγών υμενίων θα είναι:

$$R = \left[\frac{1 - \left(\frac{n_H}{n_L} \right)^{2N}}{1 + \left(\frac{n_H}{n_L} \right)^{2N}} \right]^2 \tag{6.8.4.13}$$

Στους προηγούμενους υπολογισμούς το μόνο το οποίο δεν έχουμε λάβει υπόψη μας είναι ότι η είσοδος της δέσμης του φωτός έγινε από την αέρα ($n \simeq 1.0$). Εντούτοις η ακολουθούμενη αποδεικτική διαδικασία τελικά οδηγεί σε πολύ ακριβή αποτελέσματα.

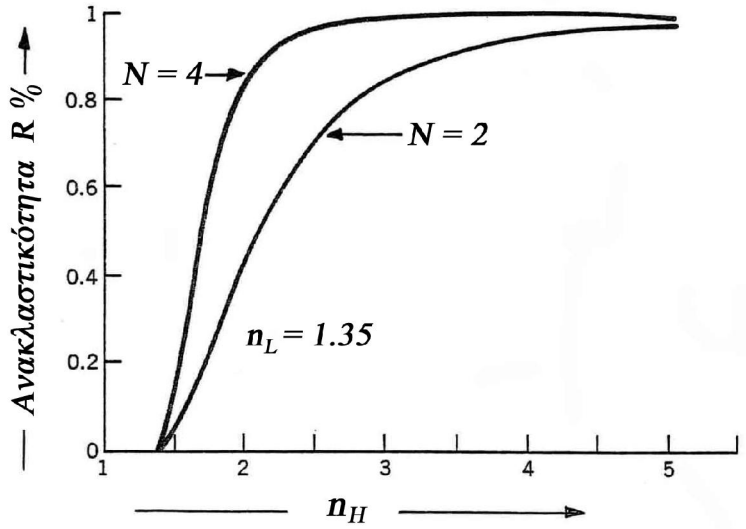
Ανακλαστικές επιφάνειες του είδους πού περιγράψαμε προηγουμένως, χρησιμοποιούνται σήμερα κατά κόρο έναντι αυτών με εξάχνωση μετάλλων. Αιτία αποτελεί η υψηλή τιμή της R που στην πρώτη περίπτωση μπορεί να προσεγγίσει και το 99%. Γνωρίζουμε π.χ. ότι τα κάτοπτρα των κοιλοτήτων συντονισμού των Lasers πρέπει να χαρακτηρίζονται από υψηλή ανακλαστικότητα. Για ένα Laser He-Ne μ.κ. $\lambda_0 = 632.8\text{nm}$, χρησιμοποιούνται κάτοπτρα πολλαπλών υμενίων με $n_H = 2.32$ (ZnS_2 – Θειούχος ψευδάργυρος) και $n_L = 1.38$ (MgF_2 – Φθοριούχο μαγνήσιο) και με αριθμό ζευγών $N = 13$. Τότε από τη (σχ. 6.8.4.13) βρίσκουμε πράγματι ότι $R \to 0.99$. Εκτός των Lasers, τέτοιου είδους κάτοπτρα πλέον χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές μια από τις οποίες όπως αναφέραμε είναι τα συμβολομετρικά φίλτρα (§ 6.8.3).

Στα διαγράμματα του (Σχ. 6.8.4.2) βλέπουμε τη γραφική παράσταση των ανακλαστικοτήτων R συναρτήσει του μ.κ. λ_0 κατόπτρων από ζεύγη υμενίων διηλεκτρικών με $n_H = 2.32(ZnS_2)$ και $n_L = 1.38(MgF_2)$ και μήκους κύματος (σχεδιασμού) $\lambda_0 = 550\text{nm}$ για $N = 3, 5, 7$ και 9. Είναι σαφές ότι για $N = 9$ η ανακλαστικότητα R του συστήματος πλησιάζει το όριο του 99% και μάλιστα για μια περιοχή μεταξύ των μ.κ. 450nm έως 650nm.



(Σχ. 6.8.4.2)

Στο διάγραμμα του (Σχ. 6.8.4.3) μπορούμε να δούμε τη μεταβολή της ανακλαστικότητας R συναρτήσει του λόγου n_H/n_L όπως αυτή εκφράζεται μέσω της (σχ. 6.8.4.13). Υποθέτοντας $n_L = 1.35$ και θεωρώντας τη μεταβολή της τιμής του n_H από 1.38 έως 5.1 παίρνουμε τις γραφικές παραστάσεις που αντιστοιχούν σε ανακλαστικές επιφάνειες με $N = 2$ και $N = 4$ ζεύγη διηλεκτρικών.

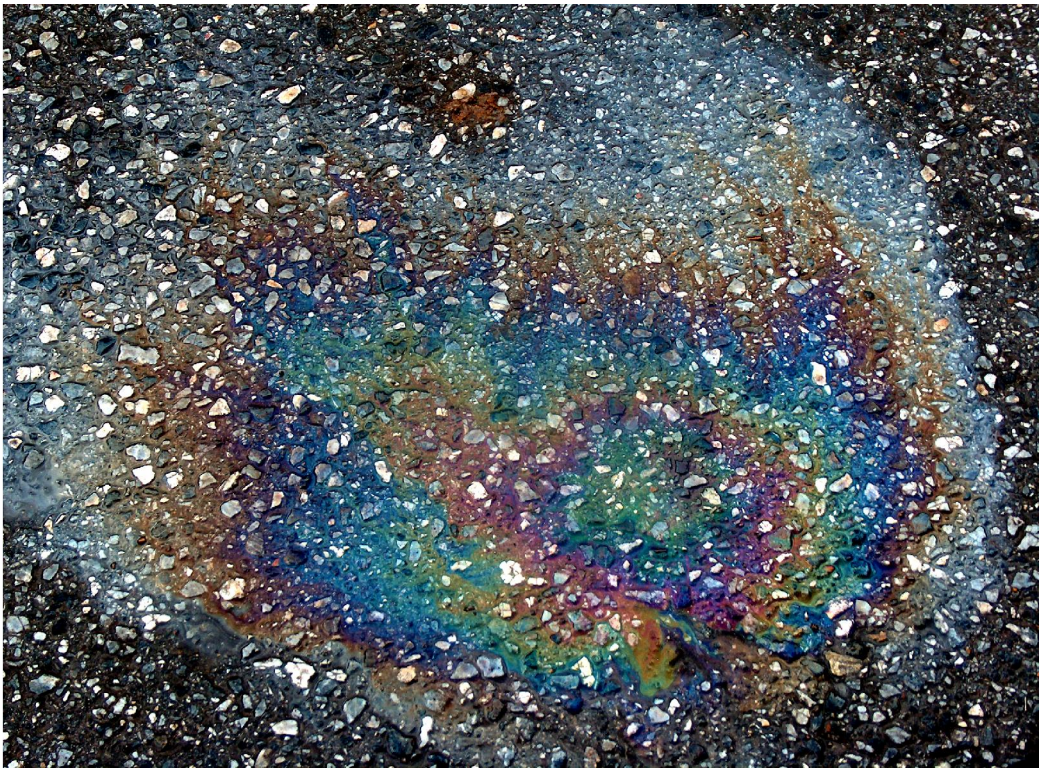


(Σχ. 6.8.4.3)

Συμπεραίνουμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του δ.δ. n_H, τόσο με λιγότερα ζεύγη υμενίων είναι δυνατόν να επιτύχουμε μεγάλες τιμές ανακλαστικοτήτων.

6.9 *Ανάδειξη φαινομένων που σχετίζονται με τη συμβολή του φωτός*

Η πλέον συνήθης περίπτωση άμεσης παρατήρησης του φαινομένου της συμβολής του φωτός, μπορεί να γίνει πάνω στο κατάστρωμα δρόμου που είναι επικαλυμμένος με άσφαλτο και επιπλέον είναι βρεμένος. Τότε μπορούμε να δούμε έγχρωμες κατανομές φωτός με τη μορφή συνεχών – συνήθως κλειστών ζωνών – με χαρακτηριστικά κροσσών συμβολής. Πρόκειται για κροσσούς συμβολής λευκού φωτός. Είναι ως επί το πλείστον ασύμμετροι (Εικ. 6.9.1,2) και καταλαμβάνουν αρκετά μεγάλο τμήμα του οδοστρώματος. Τα προαναφερόμενα πρότυπα δεν σχη-

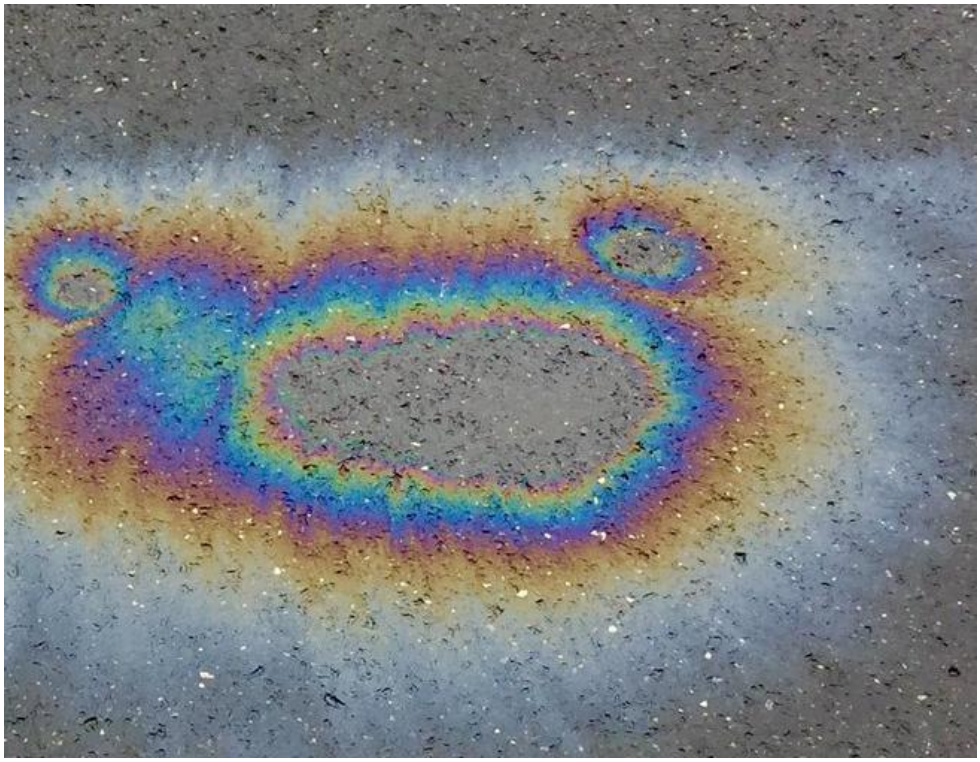


(Εικ. 6.9.1)

ματίζονται οπουδήποτε, αλλά σε περιοχές όπου προηγουμένως είχαν διαρρεύσει λάδια από μηχανές αυτοκινήτων, πετρέλαιο ή άλλου είδους λεπτόρευστα υγρά. Τα τελευταία έχουν τη δυνατότητα να σχηματίζουν πάνω στην επιφάνεια του νερού λεπτά υμένια, γεγονός που αποτελεί και τη γενεσιουργό αιτία της δημιουργίας των παρατηρούμενων κατανομών κατά το φωτισμό τους με το φως της ημέρας. Η ερμηνεία αυτού του φαινομένου γίνεται με τη βοήθεια της συμβολής του φωτός μεταξύ των διαταραχών που προέρχονται από την πάνω και την κάτω επιφάνεια του υμενίου, μετά τη διαίρεση της αρχικά προσπίπτουσας σε δύο.

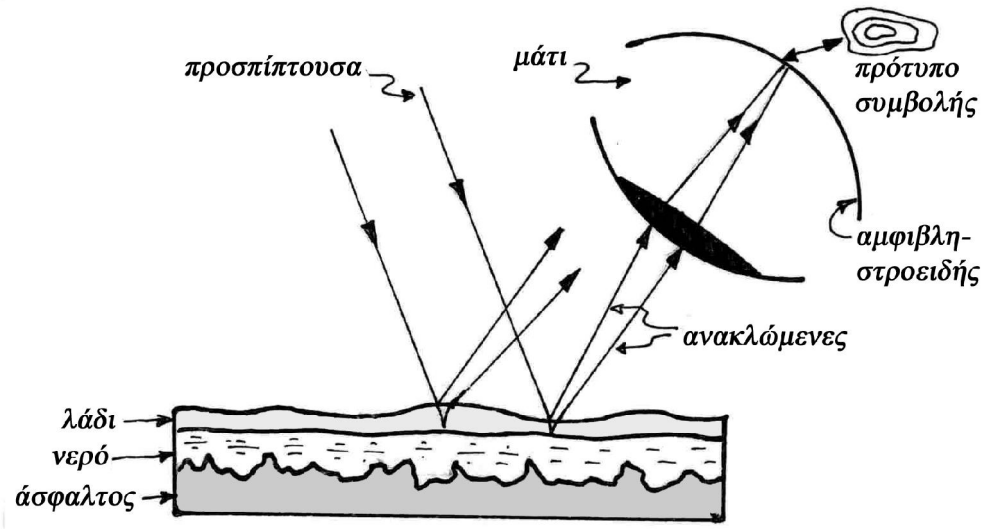
Πράγματι, αρχικά το υπάρχον στρώμα νερού (Σχ. 6.9.3), εξομαλύνει την τραχεία επιφάνεια της ασφάλτου σχηματίζοντας μια σχεδόν επίπεδη επιφάνεια. Πά-

νω σ' αυτήν, αναπτύσσεται το λεπτό υμένιο του λαδιού (πάχους της τάξης των μm) λόγω των επιφανειακών τάσεων και το οποίο γενικά είναι ανισοπαχές. Μια διαταραχή (στην πραγματικότητα πρόκειται για μέτωπο κύματος), κατά την άφιξή της



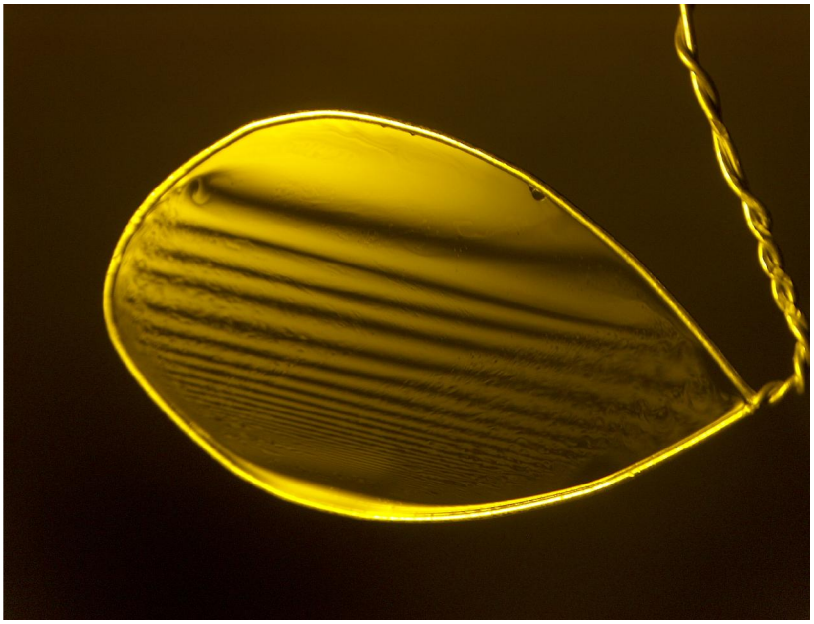
(Εικ. 6.9.2)

στην πάνω επιφάνεια του υμενίου διαχωρίζεται σε δύο. Από αυτές η μία ανακλάται κατ' ευθείαν στην πάνω επιφάνειά του ενώ η άλλη μετά από διάθλαση στην κάτω. Οι διαταραχές διαδιδόμενες με μια ορισμένη κλίση μεταξύ τους, συλλέγονται από



(Σχ. 6.9.3)

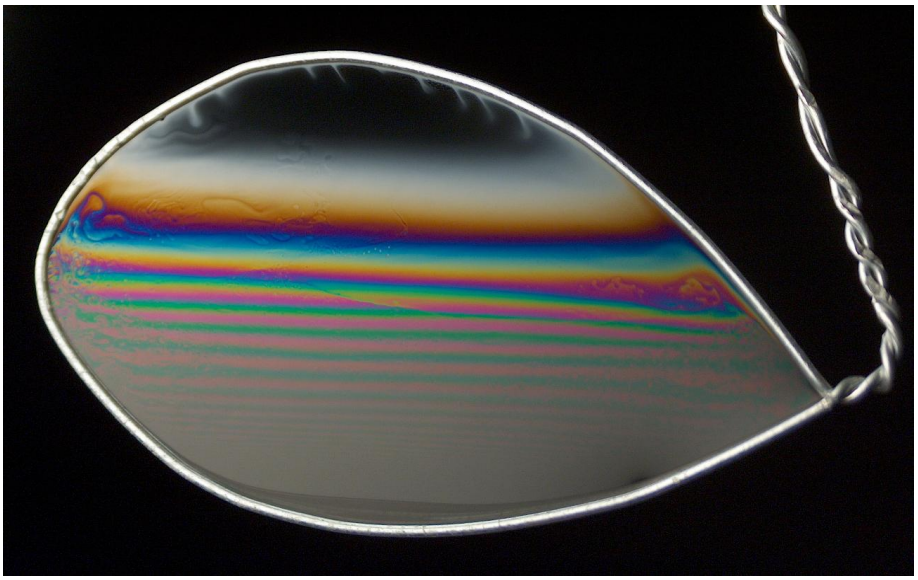
τον κρυσταλλώδη φακό του ματιού μας και συγκλίνοντας στον αμφιβληστροειδή έρχονται σε επαλληλία και συμβάλλουν. Η ίδια διαδικασία ισχύει και για όλα τα σημεία του υμενίου στα οποία φθάνουν οι διαταραχές του προσπίπτοντος μετώπου κύματος. Σαν τελικό αποτέλεσμα, στον αμφιβληστροειδή του ματιού μας θα σχηματιστεί μια κατανομή έντασης η οποία θ' αντιστοιχεί στο προαναφερόμενο πρότυπο συμβολής, το οποίο εμείς 'βλέπουμε να σχηματίζεται' πάνω στο οδόστρωμα στην περιοχή που καταλαμβάνει το υμένιο του λαδιού. Το γεγονός οφείλεται στο ότι η εικόνα που φαίνεται, είναι σαν να προέρχεται από κατεύθυνση αντίθετη αυτής των συγκλινουσών στο μάτι μας διαταραχών. Και η θέση αυτή, με βάση την αρχή της αντιστρόφου πορείας του φωτός βρίσκεται για τη συγκεκριμένη διευθέτηση στην κάτω περίπου επιφάνεια του υμενίου. Στην πραγματικότητα δηλαδή, πρότυπο συμβολής θα σχηματιστεί μόνο μέσω της βοήθειας συγκλίνοντος οπτικού συστήματος. Π.χ. αντί του ματιού μας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα θετικό φακό. Τότε στο επίπεδο απεικόνισής του θα έχουμε το σχηματισμό του προτύπου συμβολής με συζυγές επίπεδο (επίπεδο αντικειμένου) μια περιοχή κοντά στο υμένιο.



(Εικ. 6.9.4)

Το ερώτημα για το πώς είναι δυνατόν να βλέπουμε φαινόμενα συμβολής με λευκό φως, μπορεί ν' απαντηθεί εξετάζοντας το πάχος των λεπτών υμενίων λαδιού πάνω στο οδόστρωμα. Το πάχος των τελευταίων – όπως ήδη αναφέραμε – είναι της τάξης των μικρών. Με τέτοια πάχη οι διαφορές οπτικού δρόμου των δύο σε επαλληλία διαταραχών θα είναι μέσα στα όρια της χρονικής συμφωνίας για όλα τα μ.κ. του προσπίπτοντος φωτός (βλ. Πίν. 6.1.2.11). Επομένως οι σε επαλληλία διαταραχές θα έχουν τη δυνατότητα να συμβάλουν.

Πανομοιότυπες διαδικασίες ανάδειξης κροσσών συμβολής παρατηρούνται και σε άλλες περιπτώσεις. Π.χ. όταν εμβαπτίσουμε μικρό συρμάτινο βρόγχο σε σαπουνόνερο και βγάζοντάς τον, τον κρατήσουμε κατακόρυφα. Τότε παρατηρούμε (Εικ. 6.9.4) την εμφάνιση ενός προτύπου οριζοντίων σχεδόν κροσσών φωτίζοντας το σύστημα με λυχνία Na. Ο μηχανισμός σχηματισμού τους είναι παρόμοιος με αυτόν που περιγράψαμε κατά τη συμβολή από σφηνοειδές πλακίδιο (§ 6.5.2). Το λεπτό τμήμα της σφήνας σχηματίζεται στο πάνω μέρος του βρόγχου και το παχύ (λόγω βαρύτητας) στο κάτω. Μια προσπίπτουσα διαταραχή διαιρείται σε δύο ανακλώμενες από την εμπρός και την πίσω επιφάνεια της σφήνας. Η επαλληλία των δύο τελευταίων και κατ' επέκταση η συμβολή τους συντελείται στον αμφιβληστροειδή του ματιού μας. Όμως τα τοιχώματα της 'σφήνας' είναι καμπύλα. Που σημαίνει ότι η γωνία της μεταβάλλεται από την κορυφή προς τη βάση της. Αυτός είναι και ο λόγος που η χωρική περίοδος των κροσσών μεταβάλλεται. Αν το σύστημα φωτιστεί με πολυχρωματικό φως (Εικ. 6.9.5) τότε οι κροσσοί θα είναι έγχρωμοι.



(Εικ.6.9.5)

Επίσης οι έγχρωμες κατανομές που παρατηρούνται πάνω στις φούσκες σαπουνόνερου, όταν αυτές φωτίζονται με φως ημέρας (Εικ. 6.9.6). Οφείλονται σε φαινόμενα συμβολής των διαταραχών που προκύπτουν από διαίρεση του πλάτους μιας προσπίπτουσας σε δύο. Οι τελευταίες τελικά, ανακλώνται από τις δύο επιφάνειες του πολύ λεπτού υμεναίου από το οποίο συγκροτούνται οι φούσκες και συμβάλλουν κατά τα γνωστά στον αμφιβληστροειδή του ματιού μας. Στην (Εικ. 6.9.7) εκτός των φαινομένων συμβολής, ο αναγνώστης μπορεί να δει και τις φιγούρες της παρέας που τις δημιούργησε. Το τελευταίο οφείλεται βέβαια στην ανάκλασή τους από την κυρτή σφαιρική κατοπτρική επιφάνεια της φούσκας.

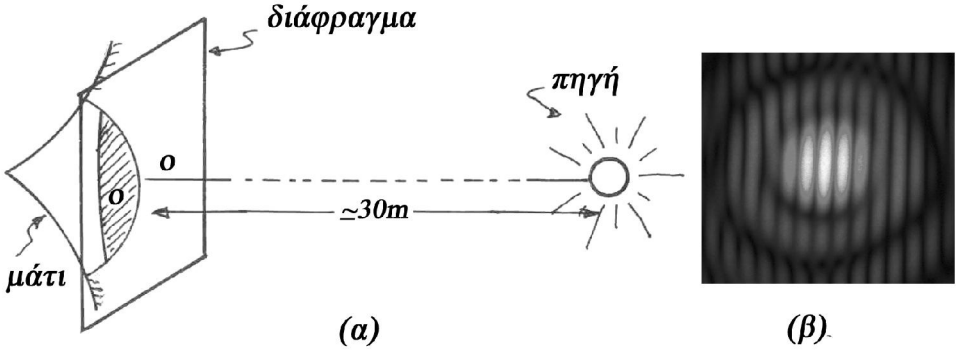
(Εικ. 6.9.6)

(Εικ. 6.9.7)

Ένας άλλος πολύ απλός τρόπος ανάδειξης του φαινομένου της συμβολής του φωτός είναι με τη βοήθεια ενός διαφράγματος το οποίο περιλαμβάνει δύο μικρές κυκλικές οπές. Το τελευταίο μπορεί να κατασκευαστεί αν σε μία αδιαφανή χάρτινη κάρτα ανοίξουμε με τη βοήθεια του άκρου μιας λεπτής βελόνης δύο μικρά κυκλικά ανοίγματα που απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από μισό χιλιοστό. Μέσω αυτού του

διαφράγματος, το οποίο τοποθετούμε σχεδόν σε επαφή με το μάτι μας (Σχ. 6.9.8α), παρατηρούμε τη νύχτα, μια μακρινή φωτεινή πηγή που βρίσκεται σε απόσταση πάνω από 30m π.χ. ένα λαμπτήρα φωτισμού του δρόμου, που κατά προτίμηση εκπέμπει μονοχρωματικό φως όπως οι λαμπτήρες Να (Νατρίου) (κίτρινο φως). Έχοντας προσηλωμένο το βλέμμα μας (δια μέσου των οπών του διαφράγματος) στην πηγή, βλέπουμε ότι δεν χαρακτηρίζεται πλέον από ομογενή φωτισμό αλλά διαμορφώνεται από παράλληλες φωτεινές και σκοτεινές ζώνες που αντιστοιχούν σε αυξομειώσεις της έντασης του φωτός (Σχ. 6.9.8β). Αν τα δύο κυκλικά ανοίγματα βρίσκονται σε μία νοητή ευθεία που είναι παράλληλη με αυτήν που ενώνει τα δύο μας μάτια, τότε η διεύθυνση των κροσσών είναι κάθετη προς αυτήν. Αν το διάφραγμα περιστραφεί κατά μία γωνία, κατά την ίδια γωνία περιστρέφονται και οι κροσσοί. Το πραγματικό πρότυπο συμβολής που θα δούμε εφόσον τα ανοίγματα του διαφράγματος είναι κυκλικά, αντιστοιχεί κατά προσέγγιση σ' αυτό της (Εικ. 6.9.8β). Πρόκειται για ένα φωτεινό δίσκο ο οποίος περιβάλλεται από ένα ή δύο το πολύ δακτυλίους με ενδιάμεσα σκοτεινούς. Οι φωτεινές περιοχές διαμορφώνονται από κροσσούς συμβολής της ίδιας περιόδου.

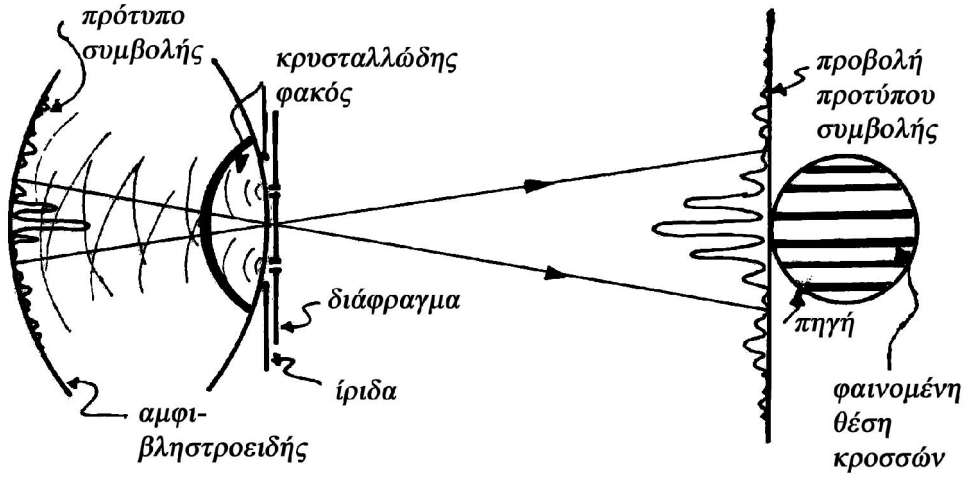
Η ερμηνεία του φαινομένου γίνεται ως εξής: Επειδή κατ' αρχή η φωτεινή πηγή είναι πολύ μακριά, στο διάφραγμα που περιλαμβάνει τα δύο κυκλικά ανοίγματα το φως προσεγγίζει με τη μορφή επιπέδου μετώπου κύματος. Αν υποθέσουμε ότι τα ανοίγματα συμπεριφέρονται μετά την πρόσπτωση του μετώπου σαν σημεια-



(Σχ. 6.9.8)

κές πηγές, τότε μετά από αυτές, διαδίδονται δύο σφαιρικά μέτωπα κύματος τα οποία μερικώς συγκλίνοντα από τον κρυσταλλώδη φακό του ματιού, έρχονται σε επαλληλία και συμβάλλουν στον αμφιβληστροειδή του ματιού μας (Σχ. 6.9.9). Στην επιφάνεια του αμφιβληστροειδή τότε αναπτύσσεται το πρότυπο συμβολής της (Εικ. 6.9.8β). Το ότι εμείς παρατηρούμε μέσω του διαφράγματος να εμφανίζονται πάνω στην πηγή και γύρω της, οφείλεται – όπως ήδη αναφέραμε – στο ότι το μάτι μας 'βλέπει' τη σχηματιζόμενη στον αμφιβληστροειδή εικόνα σαν να προέρχεται από διεύθυνση αντίθετη των προσπιπτουσών σ' αυτόν διαταραχών. Αν πάρουμε τις

προεκτάσεις της κατανομής στον αμφιβληστροειδη σημείο προς σημείο μέσω του διαφράγματος, αυτές θα προβάλλονται πάνω στο επίπεδο της πηγής εκεί δηλ. που εντοπίζεται η φαινόμενη θέση των κροσσών. Η σύνθετη εικόνα του προτύπου συμβολής της (Εικ. 6.9.8β) οφείλεται στην πραγματικότητα στο ότι τα κυκλικά



(Σχ. 6.9.9)

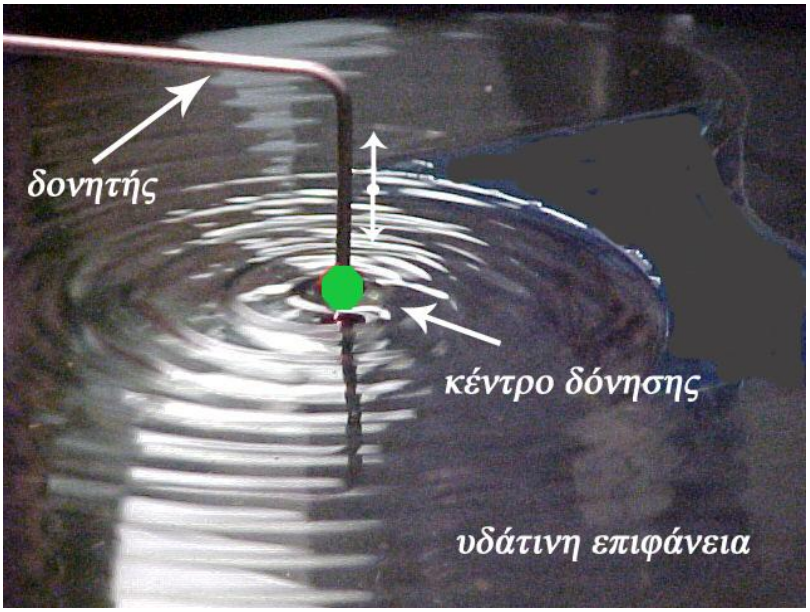
ανοίγματα δεν είναι σημειακά αλλά έχουν διαστάσεις. Κάτω από αυτές τις συνθήκες εμφανίζονται και φαινόμενα περίθλασης. Δηλ. στην πραγματικότητα η εικόνα μας δείχνει το πρότυπο περίθλασης από δύο κυκλικά ανοίγματα.

Το προαναφερόμενο είδος πειράματος μπορεί να γίνει και στον κλειστό χώρο ενός δωματίου, αρκεί να διαθέτουμε μια ισχυρή πηγή φωτός και τα ανοίγματα στην κάρτα να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά μεταξύ τους. Επίσης σαν φωτίζουσα πηγή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ήλιο, αρκεί να προσέξουμε το φως του να μην μπει κατ' ευθείαν στο μάτι μας αλλά να τον δούμε μέσω της κάρτας με τα κυκλικά ανοίγματα.

Επαλληλία και συμβολή υδατίνων κυμάτων

Μας είναι ήδη γνωστός ο τρόπος με τον οποίο διαδίδονται τα υδάτινα κύματα (βλ. Κεφ. 1: Κύματα. Εισαγωγή και (ΘΕΜΑ 1)). Και ποιο συγκεκριμένα τα κυκλικής συμμετρίας επιφανειακά κύματα που η γενεσιουργός τους αιτία είναι οι περιοδικές διαταραχές που προκαλούνται από μικρών διαστάσεων αντικείμενα τα οποία παλλόμενα μπαινοβγαίνουν στην επιφάνεια του νερού. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται μια συνεχής διάδοση κυμάτων ('κοιλάδες' και 'λόφοι') (Εικ. 6.9.10) που μπορούμε σε πρώτη προσέγγιση να θεωρήσουμε ότι είναι ορισμένου πλάτους και σταθερού μήκους κύματος λ. Όπου το μ.κ. κατά τα γνωστά είναι η απόσταση μεταξύ δύο 'κοιλάδων' ή δύο 'λόφων'.

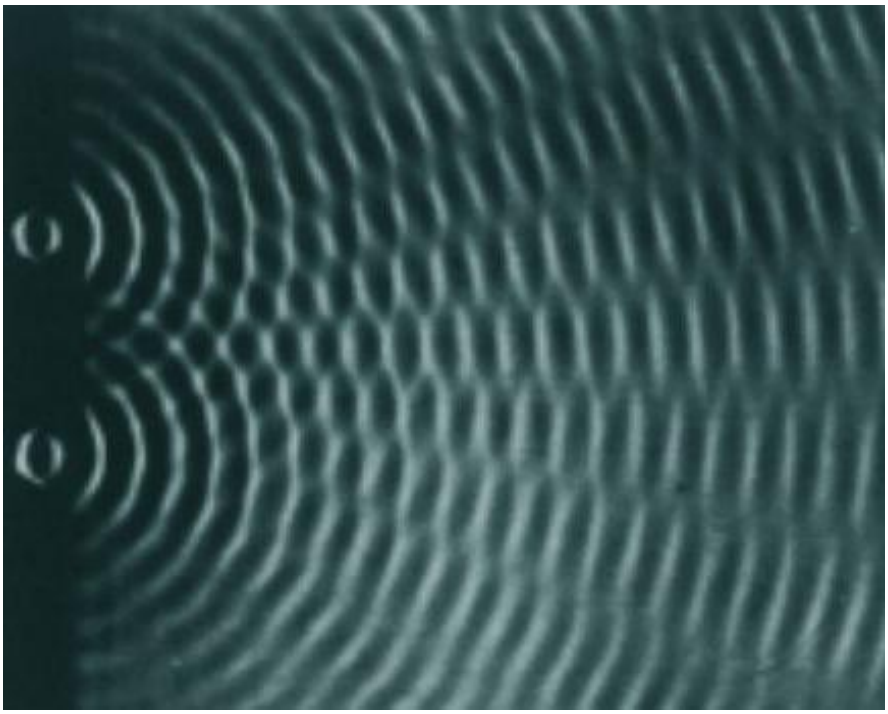
Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: Τι ακριβώς θα συμβεί και πως ερμηνεύεται όταν αντί του ενός παλλόμενου αντικειμένου, διαταράσσουν την επιφάνεια του νερού δύο (ή και περισσότερα) αντικείμενα που βρίσκονται σε μια ορισμένη απόσταση μεταξύ τους. Τα αντικείμενα αυτά (δηλ. οι πηγές δημιουργίας των κυμάνσεων) διαταράσσουν την επιφάνεια ταυτόχρονα ή με διαφορά φάσης μεταξύ



(Εικ. 6.9.10)

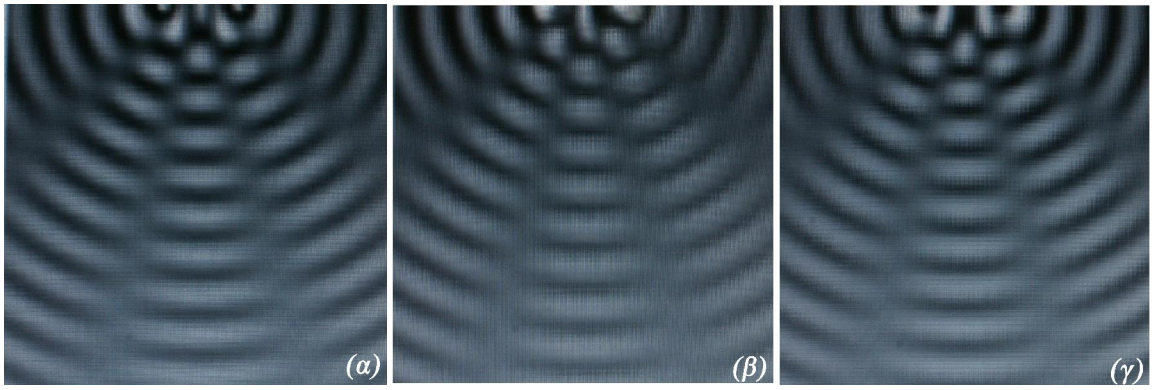
τους. Στα επόμενα θα εξετάσουμε την απλούστερη των περιπτώσεων στην οποία η επιφάνεια του νερού δονείται αρμονικά και ταυτόχρονα (σε φάση) από δύο αντικείμενα που βρίσκονται σε μια ορισμένη απόσταση μεταξύ τους, με σταθερή συχνότητα. Η απόσταση αυτή είναι αρκετά μεγαλύτερη από το μ.κ. των διαδιδόμενων με μια ορισμένη ταχύτητα υδάτινων διαταραχών. Στην (Εικ. 6.9.11) μπορούμε να δούμε την εικόνα που εμφανίζει μια υδάτινη επιφάνεια, όταν στο αριστερό της άκρο διαταράσσεται από δύο σφαιρικά αντικείμενα που μπαινοβγαίνουν ταυτόχρονα στην επιφάνειά της. Αυτό το οποίο βέβαια βλέπουμε στην εικόνα είναι ένα στιγμιότυπο. Δηλ. τη μορφολογία της επιφάνειας σε μια δεδομένη χρονική στιγμή ($t = \text{σταθ.}$). Παρατηρούμε: Περιοχές με έντονες ρυτιδώσεις δηλ. μέγιστου και ελάχιστου πλάτους διακύμανσης, καθώς και περιοχές μηδενικών διαταραχών (μηδενικού πλάτους) που αντιστοιχούν στην επιφάνεια σε ηρεμία. Πρόκειται για περιοχές με ακραίες μεταβολές πλατών. Που σημαίνει ότι υφίστανται και όλες οι ενδιάμεσες. Στις (Εικ. 6.9.12α,β,γ) μπορούμε να δούμε διάφορα χρονικά στιγμιότυπα της μορφολογίας του προτύπου των διαταραχών μιας υδάτινης επιφάνειας Δηλ. τη χρονική εξέλιξη του φαινομένου.

Γνωρίζουμε γενικά (βλ. Κεφ. 1: Κύματα (ΘΕΜΑ 1)) ότι τα υδάτινα κύματα παρουσιάζουν αρκετά μεγάλη πολυπλοκότητα (σε σχέση π.χ. με τα διαμήκη ηχητικά κύματα). Και ο λόγος είναι ότι εμφανίζουν διασκεδασμό καθώς και μη γραμ-



(Εικ. 6.9.11)

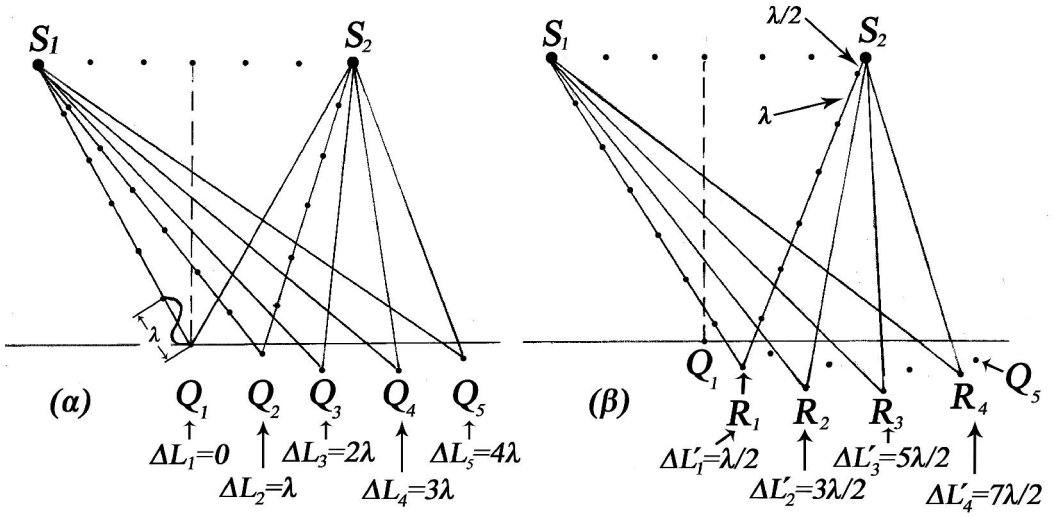
μικότητα. Στην προκειμένη όμως περίπτωση θα θεωρήσουμε ότι είναι απλά αρμονικά κύματα για τα οποία ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Που σημαίνει χωρο-χρονικά ότι η συνολική διαταραχή (το πλάτος της) σε μια οποιαδήποτε θέση της υδάτι-



(Εικ. 6.9.12)

νης επιφάνειας θα είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των δύο διαταραχών (των πλατών τους), που προέρχονται για την περίπτωση που εξετάζουμε από τις δύο πη-

γές. Θεωρούμε αρχικά (Σχ. 6.9.13α) τις δύο πηγές S_1, S_2 που πάλλονται σε φάση στην επιφάνεια του νερού, παράγοντας διαδιδόμενα αρμονικά κύματα. Επιλέγουμε τα σημεία Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 για τα οποία οι διαφορές των δρόμων τους από τις S_1, S_2 να είναι: $S_1Q_1 - S_2Q_1 = \Delta L_1 = 0$, $\Delta L_2 = \lambda$, $\Delta L_3 = 2\lambda$, $\Delta L_4 = 3\lambda$, $\Delta L_5 = 4\lambda$. Που σημαίνει ότι στα σημεία αυτά, τα κύματα προστίθενται με διαφορά δρόμου ακέραιο πολλαπ-

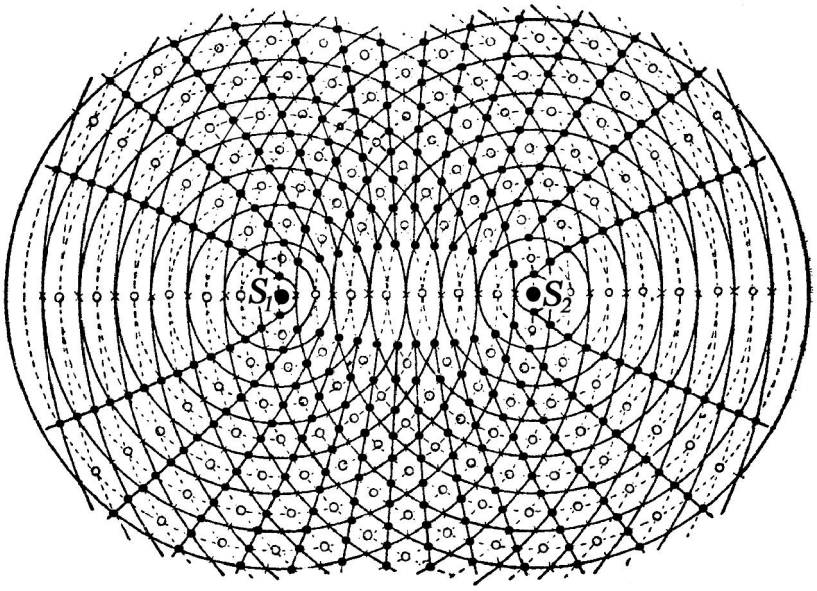


(Σχ. 6.9.13)

λάσιο του μ.κ. λ, δηλ. σε φάση. Οπότε τα σημεία στις θέσεις Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 θα διαταράσσονται με διπλάσιο πλάτος (μέγιστη ρυτίδωση της υδάτινης επιφάνειας). Έστω κατόπιν επιλέγουμε τα σημεία R_1, R_2, R_3, R_4 (Σχ. 6.9.13β), έτσι ώστε $\Delta L'_1 = S_1R_1 - S_2R_1 = \lambda/2$, $\Delta L'_2 = 3\lambda/2$, $\Delta L'_3 = 5\lambda/2$, $\Delta L'_4 = 7\lambda/2$, που σημαίνει ότι για τα σημεία αυτά, τα κύματα προστίθενται με διαφορά δρόμου περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$. Δηλ. με αντίθεση φάσης (διαφορά φάσης 180^0). Επομένως τα σημεία στις θέσεις R_1, R_2, R_3, R_4 θα έχουν μηδενικό πλάτος. Άρα η υδάτινη επιφάνεια στις θέσεις αυτές είναι αδιατάρακτη. Και όσον αφορά τα σημεία σε παραπλήσιες θέσεις μεταξύ των σημείων Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 και R_1, R_2, R_3, R_4 τα συνολικά πλάτη των ταλαντώσεων, θα είναι ενδιάμεσα μεταξύ των προαναφερόμενων ακραίων.

Μπορούμε να συμπεράνουμε τελικά ότι η επαλληλία των συμφώνων διαταραχών που προκαλούν οι διεγείρουσες πηγές S_1, S_2 έχουν σαν αποτέλεσμα να οδηγήσουν σε συμβολή τα υδάτινα κύματα και το αναδεικνυόμενο πρότυπο στην επιφάνεια του νερού είναι ένα πρότυπο συμβολής. Η μορφολογία αυτού του προτύπου, δηλ. οι γεωμετρικοί τόποι π.χ. των σημείων μέγιστου πλάτους, μηδενικού πλάτους ή ενδιάμεσων τιμών πλάτους, καθορίζεται προφανώς από τη σχέση:

$S_2Q - S_1Q =$ σταθ. Όπου Q ένα από τα σημεία του γεωμετρικού τόπου για τα οποία η διαφορά των αποστάσεων από τις πηγές S_1, S_2 έχει την ίδια σταθερή τιμή. Κάτω από αυτές τις συνθήκες συμπεραίνουμε ότι οι γεωμετρικοί τόποι (από μαθηματική άποψη) συνιστούν σημεία υπερβολών στο επίπεδο της υδάτινης επιφάνειας. Το γεγονός αυτό γίνεται εμφανές στο (Σχ. 6.9.14)*. Όπου οι συνεχείς κύκλοι παριστά-



(Σχ. 6.9.14)

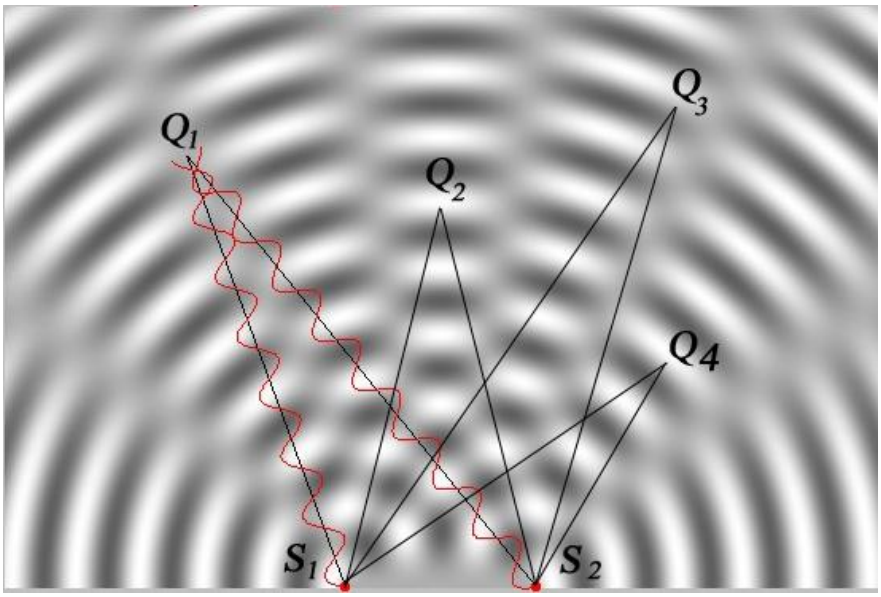
νουν μέγιστα των αρμονικών διαταραχών και οι διακεκομμένοι ελάχιστα. Σημειώνουμε με κύκλους τα σημεία τομής ελάχιστων - ελάχιστων ενώ με έντονες τελείες τα σημεία τομής μέγιστων - ελάχιστων σ' όλη την επιφάνεια του σχήματος, από όπου και γίνεται εμφανής ο υπερβολικός χαρακτήρας των συγκεκριμένων γεωμετρικών τόπων. Όσον αφορά τη μορφολογία του μοντέλου αυτού, διατηρείται και για οποιαδήποτε άλλο στιγμιότυπο, κατά τη χρονική εξέλιξη του φαινομένου (βλ. Εικ. 6.9.12).

Παράδειγμα

Στο στιγμιότυπο της (Εικ. 6.9.15) οι δύο σε φάση μικρών διαστάσεων πηγές S_1, S_2, προκαλούν σε μια υδάτινη επιφάνεια αρμονικές διαταραχές μ.κ. λ και απέ-

* Θ.Γ. Κουγιουμζέλη Σ. Γ. Περιστεράκη: 'Στοιχεία Φυσικής' Τόμ. ΙΙ: Κυματική. Βιβλιοπωλείο Αθαν. Καραβία. Αθήνα 1965 . Έκδ. $5^{η}$.

χουν μεταξύ τους απόσταση $d = 3\lambda$. Να υπολογιστούν τα πλάτη κατά την επαλληλία των δύο διαταραχών στα σημεία Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.



(Εικ. 6.9.15)

● Η επίλυση θα γίνει με τη βοήθεια μετρήσεων πάνω στην επιφάνεια του προτύπου συμβολής όπως αυτό φαίνεται στην (Εικ. 6.9.15). Το σημείο Q_1 – όπως βλέπουμε – αντιστοιχεί σε σημείο μηδενικού πλάτους. Τα Q_2, Q_4 μέγιστου πλάτους και το Q_3 σε ενδιάμεσο πλάτος μεταξύ των προαναφερόμενων ακραίων. Πράγματι: α) Για το σημείο Q_1 με μετρήσεις πάνω στο πρότυπο συμβολής (δεδομένου ότι $d = 3\lambda$) βρίσκουμε: $S_1Q_1 = 7.285\lambda$ και $S_2Q_1 = 8.714\lambda$. Επομένως η διαφορά των δρόμων από τις S_1, S_2 στο Q_1 θα είναι: $S_2Q_1 - S_1Q_1 = \Delta\lambda_1 \simeq 1.5\lambda$. Βλέπουμε πράγματι ότι οι διαταραχές συμβάλουν στο σημείο αυτό με διαφορά φάσης 180^0. Άρα το πλάτος της συνολικής διαταραχής θα είναι μηδέν. β) Για το σημείο Q_2 βρίσκουμε: $S_1Q_2 = S_2Q_2 = 6\lambda$. Οπότε $\Delta\lambda_2 = 0$. Επομένως οι διαταραχές συμβάλουν στο σημείο αυτό με διαφορά φάσης 0^0. Και άρα το σημείο θα δονείται με μέγιστο πλάτος (διπλάσιο του ενός από τα προς επαλληλία κύματα). γ) Για το σημείο Q_3 βρίσκουμε: $S_1Q_3 = 8.714\lambda$ και $S_2Q_3 = 7.42\lambda$. Επομένως η διαφορά των δρόμων από τις S_1, S_2 στο Q_3 θα είναι: $S_1Q_3 - S_2Q_3 = \Delta\lambda_3 \simeq 1.28\lambda$. Βλέπουμε δηλ. ότι οι διαταραχές συμβάλουν στο σημείο αυτό με διαφορά φάσης $360^0 + 100.8^0$. Και το συνολικό πλάτος τους στο σημείο αυτό είναι το 0.56 του ενός από τα προς επαλληλία κύματα. δ) Για το σημείο Q_4 βρίσκουμε: $S_1Q_4 \simeq 6\lambda$ και $S_2Q_4 = 4\lambda$. Επομένως η διαφορά των δρόμων από τις S_1, S_2 στο Q_4 θα είναι: $S_1Q_4 - S_2Q_4 = \Delta\lambda_4 \simeq 2\lambda$. Επομένως οι διαταρα-

χές συμβάλλουν στο σημείο αυτό με διαφορά φάσης 2×360^0. Και άρα (εφόσον οι διαταραχές βρίσκονται σε φάση) το σημείο θα δονείται με μέγιστο πλάτος (διπλάσιο του ενός από τα προς επαλληλία κύματα).

Στην αεροφωτογραφία της (Εικ. 6.9.16) μπορούμε να δούμε φαινόμενα συμβολής από κυκλικά επιφανειακά υδάτινα κύματα μεγάλης κλίμακας. Στο κάτω με-

(Εικ. 6.9.16)

ρος της εικόνας βρίσκονται παραλιακές κτιριακές εγκαταστάσεις στις οποίες από την ανοικτή θάλασσα προσπίπτουν σχεδόν επίπεδα υδάτινα μέτωπα κύματος. Τα τελευταία προσκρούουν σε αντικείμενα όπως εμπόδια και ανοίγματα, τα οποία ανακλούν προς όλες τις διευθύνσεις. Δηλ. στην πραγματικότητα δημιουργούνται πηγές κυκλικών υδατίνων κυμάτων, που διαδίδονται σε πεδίο περίπου 180^0. Και είναι εμφανές ότι διαταραχές από παραπλήσιες πηγές, δίνουν φαινόμενα συμβολής σαν αυτά που περιγράψαμε στα προηγούμενα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Επαλληλία μεταξύ N αρμονικών διαταραχών της ίδιας συχνότητας. Σύμφωνη και ασύμφωνη επαλληλία

α) Επαλληλία μεταξύ N συμφώνων αρμονικών διαταραχών

Θ' αποδείξουμε κατ' αρχή ότι η επαλληλία N συμφώνων αρμονικών κυμάτων της μορφής: $E_{0i}\cos(\omega t - a_i)$ που διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση, μας οδηγεί σ' ένα αρμονικό κύμα $E_0\cos(\omega t - a)$ της ίδιας συχνότητας, του οποίου το πλάτος E_0 και η φάση a δίνονται από τις σχέσεις:

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{N} E_{0i}\,E_{0j}\cos\left(a_j - a_i\right) \tag{1.1}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_{oi}\sin\alpha_i}{\sum_{i=1}^{N} E_{oi}\cos\alpha_i} \tag{1.2}$$

όπου ο συμβολισμός $j > i$ σημαίνει ότι από τους όρους των γινομένων του διπλού αθροίσματος, δεχόμαστε σαν μη μηδενικούς αυτούς για τους οποίους ο δείκτης j είναι μεγαλύτερος του i.

Πράγματι η επαλληλία των N διαταραχών της μορφής $E_{0i}\cos(\omega t - a_i)$ μας δίνει:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{N} E_{0i}\cos\left(\omega t - \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}\left(\cos\omega t\cos\alpha_i + \sin\omega t\sin\alpha_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} E_{0i}\cos\omega t\cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{N} E_{0i}\sin\omega t\sin\alpha_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N} E_{0i}\cos\alpha_i\right)\cos\omega t + \left(\sum_{i=1}^{N} E_{0i}\sin\alpha_i\right)\sin\omega t \end{aligned}$$

Έστω τώρα ότι: $E_0\sin a = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}\sin a_i$ και $E_0\cos a = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}\cos a_i$

Τότε θα έχουμε : $E = E_0\cos a\cos\omega t + E_0\sin a\sin\omega t = E_0\cos(\omega t - a)$. Θα είναι επίσης:

$E_o^2 \sin^2 a = \left(\sum_{i=1}^{N} E_{0i} \sin a_i \right)^2$ και $E_o^2 \cos^2 a = \left(\sum_{i=1}^{N} E_{0i} \cos a_i \right)^2$. Οπότε αθροίζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις:

$$E_o^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} E_{0i} \sin a_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} E_{0i} \cos a_i \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 \sin^2 a_i + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N} E_{0i} E_{0j} \sin a_i \sin a_j +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N} E_{0i} E_{0j} \cos a_i \cos a_j + \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 \cos^2 a_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N} E_{0i} E_{0j} \left(\sin \alpha_i \sin a_j + \cos a_i \cos a_j \right) \Rightarrow$$

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N} E_{0i} E_{0j} \cos\left(a_j - a_i \right) \quad \rightarrow \quad (\text{σχ. } 1.1)$$

Τέλος από τις σχέσεις: $E_0 \sin a = \sum_{i=1}^{N} E_{0i} \sin a_i$ και $E_0 \cos a = \sum_{i=1}^{N} E_{0i} \cos a_i$ βρίσκουμε:

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_{0i} \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^{N} E_{0i} \cos \alpha_i} \quad \rightarrow \quad (\text{σχ. } 1.2)$$

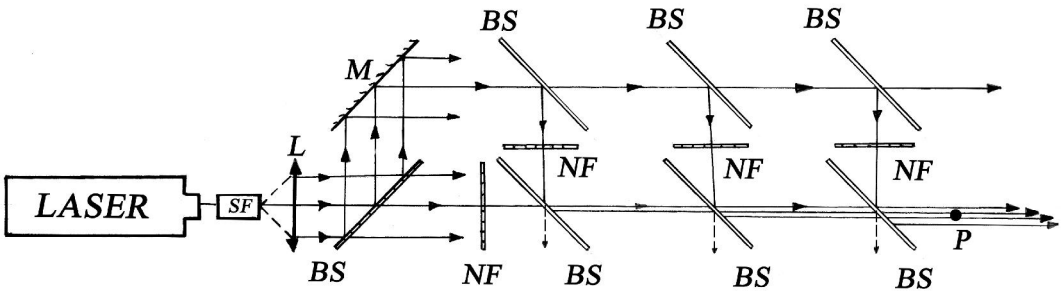
Γνωρίζουμε ότι για ένα σημείο P όπου θα έχουμε την επαλληλία των N διαταραχών, η ένταση I θα είναι ανάλογη του E_0^2. Εάν επίσης θεωρήσουμε ότι όλες οι διαταραχές έχουν την ίδια φάση τότε $a_j = a_i$ οπότε από τη (σχ. 1.1) βρίσκουμε:

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N} E_{0i} E_{0j} = \left(\sum_{i=1}^{N} E_{0i} \right)^2 \qquad (1.3)$$

Αν τέλος υποθέσουμε ότι και τα πλάτη E_{0i} είναι μεταξύ τους ίσα $\left(E_{0i} = E_{01} \right)$, τότε η (σχ. 1.3) γίνεται:

$$E_0^2 = \left(NE_{0i}\right)^2 = N^2 E_{01}^2 \quad \rightarrow \quad \left(I = N^2 I_0\right) \tag{1.4}$$

Δηλ. η συνολική ένταση του φωτός που προκύπτει από την επαλληλία N συμφώνων διαταραχών σ' ένα σημείο, θα είναι N^2 φορές η ένταση που δημιουργεί η μία των διαταραχών στο ίδιο σημείο. Με τη διάταξη του (Σχ. 1.1) είναι δυνατόν να επιβεβαιώσουμε το πόρισμα της (σχ. 1.4). Πράγματι μας είναι κατ' αρχή γνωστό (§ 6.1.2), ότι σύμφωνες διαταραχές παράγονται ως επί το πλείστον από πηγές Laser



(Σχ. 1.1)

(πηγές παραγωγής διαταραχών υψηλής χρονικής συμφωνίας). Έστω, λοιπόν ότι διαθέτουμε μια δέσμη Laser την οποία διευρύνουμε με την βοήθεια ενός ηθμού χώρου (SF)(Spatial Filter) και ενός φακού (L) (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (§ 3.5.2.6) Παράδειγμα)). Με τη βοήθεια του πρώτου διαχωριστή δέσμης (BS)(Beam Splitter) χωρίζεται σε δύο. Η ανακλώμενή της μέσω της δεύτερης ανάκλασης στο κάτοπτρο (M), συνεχίζει το διαχωρισμό της με τη βοήθεια των υπόλοιπων τριών διαχωριστών. Το ίδιο ισχύει και για την διερχόμενη από τον πρώτο διαχωριστή. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να συσχετίσουμε πολλές δέσμες φωτός οι οποίες και διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση. Την ισότητα όσον αφορά τις τιμές των πλατών των επί μέρους δεσμών, μπορούμε να τη διευθετήσουμε με τη βοήθεια της παρεμβολής κατάλληλων ουδέτερων φίλτρων (NF)(Neutral Filters).Επίσης τον σε φάση συσχετισμό τους μπορούμε να τον ρυθμίσουμε με τοποθέτηση σε ορισμένες θέσεις των επί μέρους προαναφερόμενων οπτικών εξαρτημάτων διαφανών πλακιδίων ορισμένου πάχους.

Στο (Σχ. 1.1) συσχετίζονται τέσσερεις τον αριθμό δέσμες όπου και επιλέγουμε ένα σημείο P στο οποίο θέλουμε να μετρήσουμε την ένταση του φωτός με την βοήθεια ενός κοινού ανιχνευτή. Τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνολικά μετρούμενη ένταση στη θέση αυτή επαληθεύει τη (σχ. 1.4). Δηλ. αν οι εντάσεις των επί μέρους τεσσάρων δεσμών στο P είναι I_0, τότε η συνολικά μετρούμενη θα είναι $I = 16 I_0$.

β) Επαλληλία μεταξύ N ασύμφωνων αρμονικών διαταραχών

Η εκπομπή ασύμφωνων διαταραχών παραπέμπει άμεσα στις χαοτικές πηγές φωτός. Οι πλέον συνήθεις από αυτές είναι οι κλασσικές πηγές νήματος βολφραμίου που εκπέμπουν πολυχρωματικό (λευκό) φως. Σ' αυτές οι ατομικοί εκπομποί (δηλ. τα άτομα της πηγής) για την ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος, εκπέμπουν στιγμιαία διαταραχές περιορισμένης χρονικής διάρκειας $10^{-8}\mathrm{s}$, καθώς και με ένα εντελώς τυχαίο τρόπο. Κατά συνέπεια και οι φάσεις τους, κατά την επαλληλία τους σ' ένα σημείο, θα μεταβάλλονται χρονικά ταχύτατα και εντελώς τυχαία. Πιο αυστηρά μπορούμε να πούμε ότι ο συσχετισμός στις φάσεις μεταξύ π.χ. δύο τέτοιων διαταραχών δεν απουσιάζει εντελώς, αλλά θα υφίσταται μόνο για ένα πολύ περιορισμένο χρονικό διάστημα της τάξης των $10^{-8}\mathrm{s}$. Αμέσως μετά παύει να ισχύει δηλ. μεταβάλλεται. Κάτω από αυτές τις συνθήκες ζητούμε να προσδιορίσουμε την επαλληλία N τέτοιων διαταραχών και κατά προέκταση να βρούμε την ένταση του φωτός στη θέση αυτή.

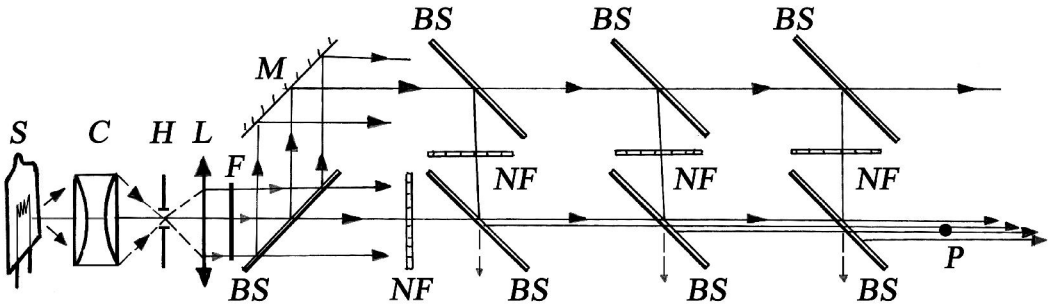
Μας είναι ήδη γνωστό ότι η ένταση του φωτός στο σημείο αυτό, όπως μετρείται από τους συνήθεις ανιχνευτές, των οποίων ο χρόνος απόκρισης είναι πολύ μεγαλύτερος των $10^{-8}\mathrm{s}$, είναι το ενεργειακό αποτέλεσμα της πρόσπτωσης στην περιοχή που θέλουμε να μετρήσουμε πολύ μεγάλου αριθμού κυματοσυρμών για ένα επίσης αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα τ (όπου τ ο χρόνος ολοκλήρωσης του ανιχνευτή). Η 'μέτρηση' της έντασης I θα είναι ανάλογη του αθροίσματος ενός πολύ μεγάλου αριθμού N στιγμιαίων τετραγώνων των πλατών E_o, $\left(I \sim \sum E_0^2\right)$ όπου όμως το κάθε E_0^2, θα υπολογίζεται από τη διαδικασία της στιγμιαίας επαλληλίας m κυματοσυρμών ασυμφώνων μεταξύ τους. Μας είναι γνωστό όμως ότι το E_0^2 για μια χρονική στιγμή t δίνεται από τη (σχ. 1.1) όπου εκτός του αθροίσματος των τετραγώνων E_{0i}^2 των m κυματοσυρμών (δηλ. των $\sum_{i=1}^{m} E_{0i}^2$), θα πρέπει να υπολογιστεί και το άθροισμα των όρων της μορφής: $E_{0i}E_{0j}\cos\left[a_j(t)-a_i(t)\right]$. Δηλ. το:

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{m} E_{0i}\,E_{0j}\cos\left[a_j(t)-a_i(t)\right]$ για μια δοσμένη χρονική στιγμή t. Ένα τέτοιο όμως, άθροισμα τη στιγμή t θα έχει θετική ή αρνητική τιμή ανάλογα με το αποτέλεσμα των αθροιζομένων ποσοτήτων $\cos\left[a_j(t)-a_i(t)\right]$. Επομένως είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η στατιστική μέση τιμή για N τέτοια αθροίσματα στη διάρκεια του χρόνου ολοκλήρωσης τ θα είναι μηδέν. Τότε πλέον η ένταση του φωτός θα καθορίζεται από το άθροισμα των N όρων των E_0^2 όπου $E_0^2 = \sum_{i=1}^{m} E_{0i}^2$. Επομένως: Η συνολι-

κή ένταση του φωτός που προκύπτει από την επαλληλία N διαταραχών ασυμφώνων μεταξύ τους, θα είναι ίση με το άθροισμα των εντάσεων της κάθε μιας διαταραχής ξεχωριστά. Εάν οι N επί μέρους εντάσεις είναι ίσες μεταξύ τους, τότε θα ισχύει:

$$E_0^2 = NE_{01}^2 \quad \rightarrow \quad (I = NI_0) \tag{1.5}$$

Μια πειραματική διάταξη επαλληλίας ασύμφωνων διαταραχών είναι αυτή του (Σχ. 1.2). Όπου σαν πηγή χρησιμοποιείται μια λυχνία αλογόνου (νήματος)



(Σχ. 1.2)

(S). Με τη βοήθεια ενός ισχυρού συμπυκνωτή φακού (C) συγκεντρώνουμε το φως σ' ένα μικρό κυκλικό άνοιγμα (H). Το φως μετά το άνοιγμα συνιστά ένα κατά προσέγγιση σφαιρικό μετ. κύματος, το οποίο με τη βοήθεια ενός θετικού φακού (L) γίνεται επίπεδο. Τη μονοχρωματικότητα αυτής της δέσμης, μπορούμε να την πετύχουμε με την παρεμβολή κάθετα σ' αυτήν ενός συμβολομετρικού φίλτρο (F) στενής φασματικής περιοχής (βλ. § 6.8.3). Όσον αφορά τη διάταξη μετά το φίλτρο, είναι πανομοιότυπη με αυτή του (Σχ. 1.1).

Στο σχήμα αυτό συσχετίζονται ασύμφωνα τέσσερεις τον αριθμό δέσμες όπου και επιλέγουμε (στο χώρο διάδοσής τους) ένα σημείο P στο οποίο θέλουμε να μετρήσουμε την ένταση του φωτός με την βοήθεια ενός κοινού ανιχνευτή. Τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνολικά μετρούμενη ένταση στη θέση αυτή, επαληθεύει τη (σχ. 1.5). Δηλ. αν οι εντάσεις των επί μέρους τεσσάρων δεσμών στο P είναι I_0, τότε η συνολικά μετρούμενη θα είναι $I = 4I_0$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

*Επαλληλία δύο δεσμών μονοχρωματικών φώτων με διαφορετικές συχνότητες**

Μας είναι γνωστό από τη μελέτη της (§ 6.1.2), ότι το 'αυστηρά μονοχρωματικό φως' δεν έχει φυσική υπόσταση. Οι συνήθεις πραγματικές 'μονοχρωματικές' πηγές, συνήθως εκπέμπουν ψευδομονοχρωματικό φως, το οποίο ανάλογα με το φασματικό του εύρος $\Delta\lambda$, τείνει στο να είναι περισσότερο ή λιγότερο μονοχρωματικό.

Στα επόμενα θεωρούμε την επαλληλία δύο δεσμών φωτός υψηλής μονοχρωματικότητας, των οποίων οι συχνότητες είναι $\omega_0 + \delta\omega/2$ και $\omega_0 - \delta\omega/2$ και τα πλάτη τους E_{01} και E_{02}. Θεωρούμε ότι διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση εκπεμπόμενες από δύο πηγές που βρίσκονται σε μια ορισμένη απόσταση μεταξύ τους. Άρα η συνολική διαταραχή σ' ένα σημείο P στο χώρο κατά μήκος της διάδοσης θα είναι:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_{01}\cos\left\{\left(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right)t - kz_1 + \theta_1\right\} + E_{02}\cos\left\{\left(\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}\right)t - kz_2 + \theta_2\right\} \\ &= E_{o1}\cos\left\{\left(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right)t + \alpha_1\right\} + E_{02}\cos\left\{\left(\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}\right)t + \alpha_2\right\} \qquad (2.1) \\ \alpha_1 &= \theta_1 - kz_1, \qquad \alpha_2 = \theta_2 - kz_2 \end{aligned}$$

όπου α_1, α_2 οι φάσεις για $t = 0$. Τότε η στιγμιαία τιμή της διακινούμενης ενέργειας (βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα (§2.4.2), (σχ. 2.4.2.5)) δηλ. της έντασης $I(t)$ (που είναι ίση με τη στιγμιαία τιμή του μέτρου του διανύσματος Poynting αν παραλείψουμε τη σταθερή $\varepsilon_0 c$) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}| = I(t) &= E_{01}^2\cos^2\left\{\left(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right)t + a_1\right\} + E_{02}^2\cos^2\left\{\left(\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}\right)t + a_2\right\} + \\ &+ 2E_{01}E_{02}\cos\left\{\left(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right)t + a_1\right\}\cdot\cos\left\{\left(\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}\right)t + a_2\right\} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Αν τώρα για τη μέτρηση της έντασης χρησιμοποιήσουμε ένα κοινό ανιχνευτή με χρόνο απόκρισης έστω $\tau = 10^{-6}\,\mathrm{s}$, τότε αυτή θα δίνεται από τη γνωστή (σχ. 6.2.1):

---

* H.H. Hopkins: 'Theory of coherence and applications' (Advanced Optical Techniques. Ed. by A.VAN HELL. N.H. 1976).

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} |\mathbf{S}|\, dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} I(t)\, dt \tag{2.3}$$

σαν μέση χρονική τιμή (για χρόνο ολοκλήρωσης τ) της $I(t)$. Επειδή οι χρησιμοποιούμενες ακτινοβολίες ανήκουν στην περιοχή του ορατού Η/Μ φάσματος για την οποία $\omega_0 + (\delta\omega/2), \omega_0 - (\delta\omega/2) \simeq 10^{14}\,\mathrm{Hz}$, τότε θα έχουμε:

$$\left\langle \cos^2\left\{\left(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right)t + a_1\right\}\right\rangle = \left\langle \cos^2\left\{\left(\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}\right)t + a_2\right\}\right\rangle = \frac{1}{2} \tag{2.4}$$

όπου η ολοκλήρωση για τον υπολογισμό των μέσων τιμών γίνεται ακόμα και για χρόνο $t = T$ δηλ. μιας περιόδου των αρμονικών διαταραχών. Επομένως η (σχ. 2.3) γίνεται:

$$\begin{aligned} I = &\left(\frac{E_{01}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{E_{02}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{E_{01}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{E_{02}}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\int_o^{\tau}\{\cos(\delta\omega\cdot t + \alpha_1 - \alpha_2) + \\ &+ \cos\left[2\omega_0 t + (a_1 + a_2)\right]\}\, dt \end{aligned} \tag{2.5}$$

όπου κάναμε χρήση της ανάπτυξης του γινομένου των συνημιτόνων της (σχ. 2.2). Όσον αφορά τον δεύτερο όρο του ολοκληρώματος (όπου το συνημίτονο εμφανίζεται με συχνότητα $2\omega_0$), πρόκειται για μια μέση τιμή για την οποία αποδεικνύεται ότι:

$$\left\langle \cos\left[2\omega_0 t + (\alpha_1 + \alpha_2)\right]\right\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\tau} \cos\left[2\omega_0 t + (\alpha_1 + \alpha_2)\right] dt = 0 \tag{2.6}$$

Τότε η (σχ. 2.5) παίρνει τη μορφή:

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\{\cos\delta\omega t\,\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \sin\delta\omega t\,\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\}\, dt \tag{2.7}$$

όπου $A_j = E_{0j}/\sqrt{2} \quad j = 1,2$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι οι δύο δέσμες έχουν χρόνους συμφωνίας τ_c μικρούς σε σχέση με το χρόνο ολοκλήρωσης τ, τότε η διαφορά φάσης $\alpha_1 - \alpha_2$ θα υπόκειται σε τυχαίες και ταχύτατες μεταβολές μέσα στο χρονικό διάστημα τ. Επο-

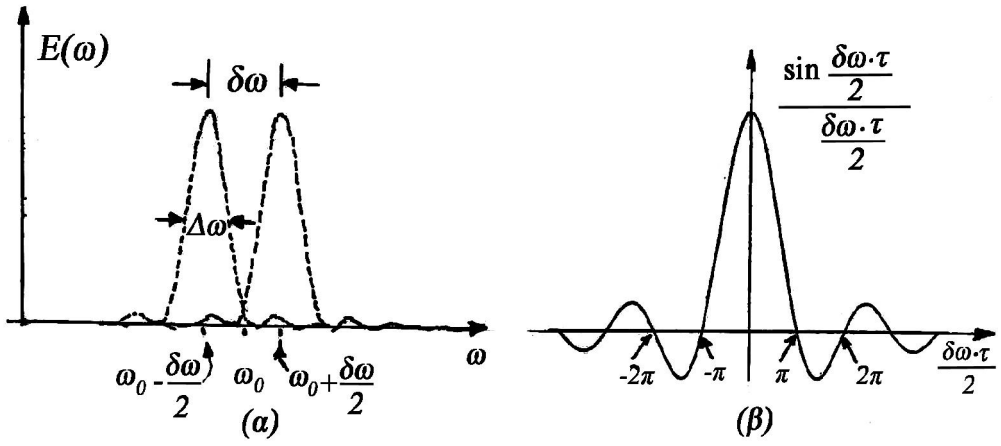
μένως ο τρίτος όρος της (σχ. 2.7) κατά μέσο όρο θα τείνει στο μηδέν. Άρα η (σχ. 2.7) γίνεται:

$$I = I_1 + I_2 \tag{2.8}$$

όπου $I_1 = A_1^2, I_2 = A_2^2$ είναι οι εντάσεις αντίστοιχα της κάθε δέσμης ξεχωριστά. Αν όμως ο χρόνος συμφωνίας τ_c είναι κατά πολύ μεγαλύτερος από το χρόνο ολοκλήρωσης τ, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διαφορά φάσης $\alpha_1 - \alpha_2$ είναι σταθερή. Επομένως από τη (σχ. 2.7) προκύπτει:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}\right)} \tag{2.9}$$

Ο τρίτος όρος της (σχ. 2.9), με βάση τη συνθήκη $\tau_c > \tau$, αντιπροσωπεύει ένα όρο συμβολής. Για τις περιπτώσεις τέλος όπου ο χρόνος συμφωνίας τ_c δεν είναι ούτε πολύ μικρότερος ούτε πολύ μεγαλύτερος του τ, η ένταση I παίρνει ενδιάμεσες τιμές από αυτές που ορίζονται από τις (σχ. 2.8, 9).



(Σχ. 2.1)

Όμως προκειμένου ο όρος συμβολής στη (σχ. 2.9) να έχει μη μηδενικές τιμές, συνεπάγεται περιορισμούς: α) Όσον αφορά το εύρος $\Delta\omega$ (ή $\Delta\nu$) του ενεργειακού φάσματος $E(\omega)$ (ή $E(\nu)$) της κάθε δέσμης ξεχωριστά (Σχ. 2.1α) και β) Τη διαφορά $\delta(\omega)$ (ή $\delta(\nu)$) των συχνοτήτων τους (Σχ. 2.1α). Είναι γνωστό κατ' αρχή (σχ.

6.1.2.20), ότι μεταξύ του χρόνου συμφωνίας τ_c και του φασματικού εύρους $\Delta\nu$ υφίσταται η σχέση: $\tau_c = 1/\Delta\nu$. Τότε αν υποθέσουμε ότι $\tau_c \gg \tau$, θα πρέπει επίσης να ισχύει: $\Delta\nu \ll 1/\tau$, οπότε σύμφωνα με τη γνωστή σχέση $\Delta\lambda/\lambda = \Delta\nu/\nu$ θα έχουμε:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu} << \frac{1}{\nu \cdot \tau} \tag{2.10}$$

Η τελευταία θα πρέπει να ισχύει προκειμένου μέσα στο χρόνο ολοκλήρωσης τ ν' ανιχνεύονται φαινόμενα συμβολής. Για παράδειγμα αν $\tau = 10^{-6}\text{s}$ και $\nu = 5\times10^{14}\text{Hz}$ $(\omega = 2\pi\nu)$ η οποία αντιστοιχεί σε μ.κ. $\lambda \simeq 600\text{nm}$, τότε με βάση τη (σχ. 2.10) θα έχουμε: $\Delta\lambda \ll (\lambda/\nu\cdot\tau) \simeq 1.2\times10^{-6}\text{nm}$. Μας είναι όμως γνωστό ότι η φασματική λυχνία του Cd (Καδμίου) χαμηλής πίεσης, εκπέμπει μία από τις πλέον στενές φασματικές γραμμές στο μ.κ. $\lambda = 643.8\text{nm}$ για την οποία (βλ. Πίν. 6.1.2.11) $\Delta\lambda \simeq 0.0013\text{nm}$. Άρα, ακόμα και αυτή, είναι κατά τρεις τάξεις μεγέθους ευρύτερη από ότι θα έπρεπε, προκειμένου η διαφορά φάσης $\alpha_1 - \alpha_2$ στη (σχ. 2.9) να παραμένει σταθερή κατά τη χρονική διάρκεια $\tau = 10^{-6}\text{s}$. Το γεγονός, αυτό μας οδηγεί – προκειμένου κατ' αρχή να μπορέσουμε να συσχετίσουμε δέσμες διαφορετικών συχνοτήτων – να χρησιμοποιήσουμε όχι ψευδομονοχρωματικό φως (τουλάχιστον από τις συνήθεις γραμμές εκπομπής), αλλά φως από πηγές Laser, για τις οποίες μας είναι γνωστό (βλ. Πίν. 6.1.2.11) ότι το φασματικό τους εύρος είναι πάρα πολύ στενό.

Επιπλέον όμως, προκειμένου ο όρος συμβολής στη (σχ. 2.9) να είναι μη μηδενικός, επιβάλλεται ο παράγοντας $\sin\left(\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}\right)\Big/\left(\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}\right)$ να έχει σημαντική τιμή. Για να συμβαίνει αυτό όμως θα πρέπει τουλάχιστον να ισχύει (Σχ. 2.1β):

$$\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2} \ll \pi \tag{2.11}$$

όπου $\delta\omega$ η διαφορά συχνοτήτων μεταξύ των δύο ακτινοβολιών. Και επειδή $\delta\omega = 2\pi\delta\nu$ τότε:

$$\delta\nu << \frac{1}{\tau} \tag{2.12}$$

όπου τ ως γνωστόν ο χρόνος ολοκλήρωσης του ανιχνευτή. Αν χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σχέση $\delta\lambda/\lambda = \delta\nu/\nu$ τότε η (σχ.2.12) γίνεται:

$$\delta\lambda << \frac{\lambda}{\nu \cdot \tau} \tag{2.13}$$

όπου $\delta\lambda$ η διαφορά μ.κ. μεταξύ των δύο ακτινοβολιών των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν κατά $\delta\nu$. Θεωρούμε τώρα ότι διαθέτουμε δύο δέσμες από πηγές Laser που διαφέρουν στο μ.κ. κατά $\delta\lambda$ και που συντονίζονται στην ίδια περίπου περιοχή με $\nu = 5\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$ με αντίστοιχο μ.κ. $\lambda = 600\mathrm{nm}$. Τότε, με ένα κοινό ανιχνευτή – του οποίου ο χρόνος ολοκλήρωσης είναι $\tau = 10^{-6}\mathrm{s}$ – προκειμένου ν' ανιχνεύσουμε φαινόμενα συμβολής στο χρονικό αυτό διάστημα, θα πρέπει η διαφορά των μ.κ. των δύο ακτινοβολιών να είναι $\delta\lambda \ll 0.00012\mathrm{nm}$. Δηλ. τα κεντρικά μ.κ. των Laser επιβάλλεται να κατέχουν θέσεις που απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από ένα δεκάκοις χιλιοστό του nm.

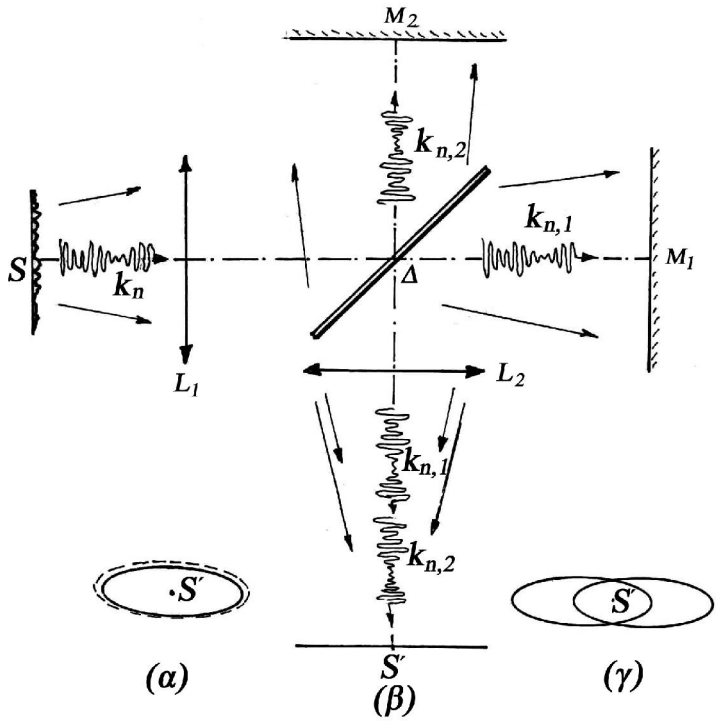
Κάτω από αυτές τις περιοριστικές συνθήκες που επιβάλλονται από τις (σχ. 2.10 και 2.13), γίνεται φανερό ότι προκειμένου να παρατηρήσουμε φαινόμενα συμβολής με δέσμες διαφορετικών συχνοτήτων, θα πρέπει τα χρονικά διαστήματα τ στα πλαίσια των οποίων γίνεται η ανίχνευση να είναι πολύ μικρά. Δηλ. χρησιμοποιώντας κοινούς ανιχνευτές, δέσμες φωτός διαφορετικής συχνότητας που προέρχονται από χαοτικές πηγές (φασματικές λυχνίες κλπ.), αναδεικνύονται σε ασύμφωνες μεταξύ τους (λόγω του μεγάλου φασματικού τους εύρους $\Delta\lambda$) και άρα δεν μας δίνουν φαινόμενα συμβολής. Είναι αυτονόητο ότι θα μπορούσε ν' ανιχνευθεί συσχετισμός μεταξύ των προαναφερομένων δεσμών, μόνο με πολύ ταχύτερους όσον αφορά το χρόνο απόκρισής τους ανιχνευτές.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Επαλληλία δύο δεσμών ψευδομονοχρωματικού φωτός

α) Από το ίδιο τμήμα της πηγής και β) από διαφορετικά τμήματά της

Το πρόβλημα θα μελετηθεί με τη βοήθεια μιας τυπικής διάταξης συμβολόμετρου Michelson του οποίου η πλήρης περιγραφή έχει δοθεί στην (§ 6.6). Αποτελείται (Σχ. 3.1β) από μια εκτεταμένη πηγή S, η οποία εκπέμπει ψευδομονοχρωματικό φως και βρίσκεται στο εμπρός εστιακό επίπεδο του φακού L_1. Τότε το από το φακό αναδυόμενο μέτωπο κύματος, προσπίπτει σ' ένα διαχωριστή δέσμης Δ που έχει κλίση 45^0 σε σχέση με τη διεύθυνση διάδοσης του φωτός. Κατόπιν το μισό



(Σχ. 3.1)

του ανακλάται και το υπόλοιπο διαθλάται. Το ανακλώμενο από τον Δ ξανά ανακλάται στο κάτοπτρο M_2, περνάει μέσα από αυτόν και απεικονίζεται σε πέτασμα στη θέση S' (πρόκειται για το είδωλο της πηγής) από ένα άλλο φακό L_2. Το διαθλώμενο από τον διαχωριστή Δ, ανακλάται στο κάτοπτρο M_1, ξανά ανακλάται σ' αυτόν και απεικονίζεται μέσω του φακού L_2 στην ίδια ακριβώς θέση με αυτήν του

προηγουμένου ειδώλου. Ανάλογα με τις εστιακές αποστάσεις f_1, f_2 των φακών L_1, L_2 η μεγέθυνση των ειδώλων θα είναι ίση με f_2/f_1, επειδή πηγή και είδωλα βρίσκονται αντίστοιχα στα εστιακά επίπεδα των φακών. Επίσης εφόσον ο διαχωριστής Δ βρίσκεται σε κλίση 45^0 σχετικά με τους δύο κάθετους άξονες της διάταξης και τα κάτοπτρα M_1, M_2 κάθετα στις διευθύνσεις αυτές (δηλ. ορθογώνια μεταξύ τους), τα είδωλα της πηγής μέσω των δύο κλάδων του συμβολόμετρου θα ταυτίζονται σημείο προς σημείο στη θέση του πίσω εστιακού επιπέδου του φακού L_2 (Σχ. 3.1α). Μ' αυτά τα δεδομένα, ένας κυματοσυρμός k_n που εκπέμπεται από το σημείο S της πηγής, φθάνοντας στον διαχωριστή, υποθέτουμε ότι διαχωρίζεται ('κατά πλάτος') σε δύο αντίστοιχους $k_{n,1}$ και $k_{n,2}$ και οποίοι τελικά θ' αφιχθούν στο συζυγές σημείο S' του πετάσματος. Στη διάταξη του (Σχ. 3.1β), η απόσταση ΔM_1 είναι μεγαλύτερη της ΔM_2 έτσι που οι δύο κυματοσυρμοί $k_{n,1}$ και $k_{n,2}$ κατά την έξοδό τους από το φακό L_2 να μην συμπίπτουν. Επίσης από κάθε στοιχειώδες τμήμα της πηγής θα έχουμε την εκπομπή ενός μεγάλου αριθμού τυχαία εκπεμπόμενων κυματοσυρμών, οι οποίοι μετά τη 'διαίρεσή' τους από διαχωριστή, θα φθάνουν στο αντίστοιχο συζυγές σημείο του ειδώλου κατά τον ίδιο τυχαίο τρόπο. Όταν λοιπόν η διαφορά οπτικού δρόμου από τους δύο κλάδους του συμβολόμετρου είναι μεγαλύτερη από το μήκος των κυματοσυρμών των εκπεμπόμενων από ένα σημείο της πηγής, τότε οποιοσδήποτε επιμέρους κυματοσυρμός $k_{n,1}$ που ανακλάται από το κάτοπτρο M_1, δεν θα φθάνει ταυτόχρονα στο ίδιο σημείο του ειδώλου με τον αντίστοιχό του $k_{n,2}$ που προέρχεται από την ανάκλασή του από τα κάτοπτρο M_2.

Υποθέτουμε ότι $E'_{n,1}$ και $E'_{n,2}$ είναι οι τιμές των πεδίων των διαταραχών που φθάνουν σ' ένα σημείο S' του ειδώλου στο πέτασμα και που οφείλονται στους κυματοσυρμούς $k_{n,1}$ και $k_{n,2}$ τους προερχόμενους από το κυματοσυρμό k_n, τον εκπεμπόμενο από το συζυγές σημείο S της πηγής. Τότε η συνολική διαταραχή στο S' από τους N τον αριθμό k_n κυματοσυρμούς τους εκπεμπόμενους από το στοιχειώδες τμήμα S της πηγής (με την προϋπόθεση η διαφορά του οπτικού δρόμου να είναι μεγαλύτερη του μήκους τους), θα δίνεται για την χρονική στιγμή t από τη σχέση:

$$E'(t) = \sum_{n=1}^{N} E'_{n,1}\ (t) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} E'_{m,2}\ (t) \tag{3.1}$$

Η συνθήκη $m \neq n$, εξαιρεί την ταυτόχρονη παρουσία των κυματοσυρμών $k_{n,1}$ και $k_{n,2}$ που προέκυψαν από τον αρχικό k_n. Έχουμε όμως:

$$\left.\begin{aligned} E'_{n,1}(t) &= E_{0n,1}\cos(\omega t - kz_1 + \theta_n) = E_{0n,1}\cos(\omega t + \theta_n + \varphi_1) \\ E'_{m,2}(t) &= E_{0m,2}\cos(\omega t - kz_2 + \theta_m) = E_{0m,2}\cos(\omega t + \theta_m + \varphi_2) \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

όπου θ_n, θ_m οι αρχικές φάσεις εκπομπής στην πηγή, των κυματοσυρμών k_n, k_m και $\varphi_1 = -kz_1, \varphi_2 = -kz_2$ οι φάσεις λόγω της διάδοσης τους στους δύο κλάδους του συμβολόμετρου. Επομένως η (σχ. 3.1) γίνεται:

$$E'(t) = \sum_{n=1}^{N} E_{0n,1}\cos(\omega t + \theta_n + \varphi_1) + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{N} E_{0m,2}\cos(\omega t + \theta_m + \varphi_2) \tag{3.3}$$

Τότε από τα αναφερόμενα (βλ. Κεφ. 2: Η/Μ κύματα (§ 2.4.2)(σχ. 2.4.25)) (παραλειπομένου του πολλαπλασιαστικού όρου $\varepsilon_0 c$), θα είναι:

$$\begin{aligned} I'(t) = &\sum_{n}^{N}\sum_{n'}^{N} E_{0n,1}E_{0n',1}\cos(\omega t + \theta_n + \varphi_1)\cos(\omega t + \theta_{n'} + \varphi_1) + \\ &+ \sum_{m}^{N}\sum_{m'}^{N} E_{0m,2}E_{0m',2}\cos(\omega t + \theta_m + \varphi_2)\cos(\omega t + \theta_{m'} + \varphi_2) + \\ &+ 2\sum_{n}^{N}\sum_{\substack{m \\ n\neq m}}^{N} E_{0n,1}E_{0m,2}\cos(\omega t + \theta_n + \varphi_1)\cos(\omega t + \theta_m + \varphi_2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Κατ' αρχή, αναλύουμε τους όρους των γινομένων των συνημίτονων των διπλών αθροισμάτων της (σχ. 3.4) σε αθροίσματα συνημίτονων με βάση τη γνωστή σχέση: $2\cos a\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$. Κατόπιν υπολογίζουμε τη μέση χρονική τιμή τους με τη βοήθεια της: $\langle f(t)\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\,dt$, όπου τ ο χρόνος ολοκλήρωσης. Επειδή $\nu \simeq 10^{14}\,\text{Hz}$ και ο τ είναι πολύ μεγαλύτερος της περιόδου των κυμάτων θα έχουμε:

$$\begin{aligned} &\langle\cos(2\omega t + 2\varphi_1 + \theta_n + \theta'_n)\rangle = 0 && \langle\cos(\theta_n - \theta'_n)\rangle = \cos(\theta_n - \theta'_n) \\ &\langle\cos(2\omega t + 2\varphi_2 + \theta_m + \theta'_m)\rangle = 0 && \langle\cos(\theta_m - \theta'_m)\rangle = \cos(\theta_m - \theta'_m) \\ &\langle\cos(2\omega t + \theta_m + \theta_n + \varphi_2 + \varphi_1)\rangle = 0 && \langle\cos(\theta_m - \theta_n + \varphi_2 - \varphi_1)\rangle = \cos(\theta_m - \theta_n + \varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

Τότε η ένταση του φωτός I' που είναι η μέση χρονική τιμή της $I'(t)$ στη θέση S', θα δίνεται από τη σχέση:

$$I' = \sum_{n}^{N}\sum_{n'}^{N} E_{0n,1}E_{0n',1}\cdot\frac{1}{2}\cos\left(\theta_n - \theta_{n'}\right) + \sum_{m}^{N}\sum_{m'}^{N} E_{0m,2}\cdot E_{0m',2}\cdot\frac{1}{2}\cos\left(\theta_m - \theta_{m'}\right) + \\ + 2\sum_{n}^{N}\sum_{\substack{m \\ n\neq m}}^{N} E_{0n,1}\cdot E_{0m,2}\cdot\frac{1}{2}\cos\left(\theta_m - \theta_n + \varphi_2 - \varphi_1\right) \tag{3.5}$$

Στα δύο πρώτα διπλά αθροίσματα της (σχ. 3.5), οι όροι εκτός από αυτούς για τους οποίους $n = n'$ και $m = m'$ κατά μέσον όρο τείνουν στο μηδέν επειδή οι αρχικές φάσεις $\theta_n, \theta_{n'}$ είναι τυχαίες οπότε τα συνημίτονα θα παίρνουν τιμές θετικές όσο και αρνητικές. Για τον ίδιο ακριβώς λόγο, το τρίτο διπλό άθροισμα της (σχ. 3.5) είναι μηδέν λόγο της υπόθεσής μας ότι $m \neq n$. Τότε θα έχουμε:

$$I' = \sum_{n}^{N}\frac{1}{2}E_{0n,1}{}^{2} + \sum_{m}^{N}\frac{1}{2}E_{0m,2}{}^{2} = I_1' + I_2' \tag{3.6}$$

όπου I_1' και I_2' είναι οι συνολικές εντάσεις των δεσμών στη θέση S' που προέρχονται από τους δύο κλάδους του συμβολόμετρου ανεξάρτητα. Το συμπέρασμα από την τελευταία σχέση, είναι ότι δεν παρατηρούμε φαινόμενα συμβολής, εάν η διαφορά του οπτικού δρόμου μεταξύ των δύο σε επαλληλία δεσμών είναι μεγαλύτερη από το μήκος των κυματοσυρμών δηλ. το μήκος συμφωνίας του φωτός που εκπέμπεται από στοιχειώδες τμήμα S της πηγής.

Αν η διαφορά οπτικού δρόμου $z_1 - z_2$ είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος συμφωνίας του φωτός, τότε οι δύο κυματοσυρμοί $k_{n,1}$ και $k_{n,2}$ που προέρχονται από τη 'διαίρεση' του αρχικού k_n, έρχονται σε πλήρη ταύτιση στη θέση S'. Επομένως στον τρίτο προσθετέο της (σχ. 3.5) θα περιλαμβάνονται και οι όροι για $m = n$ οπότε θα έχουμε:

$$I' = \sum_{n}^{N}\frac{1}{2}E_{0n,1}^2 + \sum_{m}^{N}\frac{1}{2}E_{0m,2}^2 + 2\sum_{n=1}^{N}E_{0n,1}E_{0n,2}\cdot\frac{1}{2}\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) \tag{3.7}$$

Για να απλοποιήσουμε την τελευταία σχέση, θα εκφράσουμε τα πλάτη των επιμέρους κυματοσυρμών $k_{n,1}$ και $k_{n,2}$ συναρτήσει του πλάτους του αρχικά προσπίπτοντος k_n στον διαχωριστή Δ και των γινομένων των συντελεστών ανάκλασης και διάθλασης (βλ. Κεφ.2: Ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ΘΕΜΑ 1)). Αν τα γινόμενα αυτά είναι ρ_1 και ρ_2 κατά τις ανακλάσεις και διαθλάσεις των $k_{n,1}$ και $k_{n,2}$ στους δύο κλάδους αντίστοιχα του συμβολόμετρου, τότε θα έχουμε:

$$E_{0n,1} = \sqrt{\rho_1}E_{0n} \qquad \text{και} \quad E_{0n,2} = \sqrt{\rho_2}E_{0n} \tag{3.8}$$

όπου E_{0n} το πλάτος του αρχικού κυματοσυρμού. Τότε ο τρίτος όρος της (σχ. 3.7) γίνεται: $2\left\{\sum_{n}^{N}\frac{1}{2}E_{0n}{}^{2}\right\}\sqrt{\rho_1\rho_2}\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right)$ και αν με $I=\sum_{n}\frac{1}{2}E_{0n}{}^{2}$ παραστήσουμε την ένταση της προσπίπτουσας δέσμης, τότε θα ισχύει:
$2\sqrt{\rho_1 I}\sqrt{\rho_2 I}\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right)=2\sqrt{I_1'I_2'}\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right)$, όπου I_1' και I_2' είναι οι εντάσεις που ανιχνεύονται στη θέση S' από τις δύο επί μέρους δέσμες όπως και στη (σχ. 3.6). Τελικά λοιπόν όταν η διαφορά δρόμου είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος συμφωνίας θα έχουμε:

$$I'=I_1'+I_2'+2\sqrt{I_1'I_2'}\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right) \tag{3.9}$$

και με όρους πλατών όπου $E_1'=\sqrt{I_1'},\ \ E_2'=\sqrt{I_2'}$

$$I'=E_1'^2+E_2'^2+2E_1'E_2'\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right) \tag{3.10}$$

όπου ο τρίτος όρος των τελευταίων σχέσεων είναι ο όρος της συμβολής.

Οι (σχ. 3.9,6) μας δίνουν τις εντάσεις στο S' για τις ακραίες περιπτώσεις όπου οι επί μέρους κυματοσυρμοί, από το ίδιο τμήμα της πηγής, συσχετίζονται ταυτόχρονα ή φθάνουν με αρκετή χρονική καθυστέρηση μεταξύ τους λόγω της μεγάλης διαφοράς δρόμου που επιβάλλεται από τους δύο κλάδους του συμβολόμετρου. Μια όμως ενδιάμεση κατάσταση, δηλ. επιμέρους συσχέτιση των κυματοσυρμών, δεν θα μπορούσε να περιγραφεί από τις δύο προηγούμενες σχέσεις. Επίσης θα πρέπει να σημειωθεί, ότι τα προαναφερόμενα εφαρμόζονται με την προϋπόθεση ότι το φως προέρχεται από ένα επί μέρους τμήμα της πηγής. Κριτήριο προκειμένου μια ομάδα εκπεμπόντων ατόμων να ανήκουν στο ίδιο τμήμα της πηγής, είναι ότι οι μεταβολές στη διαφορά φάσης μεταξύ τους που επιβάλλει το εκάστοτε όργανο, θα πρέπει να είναι μικρή σε σχέση με το 2π. Δηλ. τελικά το επιτρεπτό μέγεθος μιας τέτοιας στοιχειώδους πηγής, καθορίζεται από τη γεωμετρία του οργάνου.

Αν τώρα ένα από τα κάτοπτρα M_1, M_2 της διάταξης του (Σχ. 3.1β) λάβει κάποια κλίση, τότε στο σημείο S' του ειδώλου, θα έρχονται σε επαλληλία κυματοσυρμοί από διαφορετικά τμήματα της πηγής S και όχι από τα ίδια (Σχ. 3.1γ). Η τελική ένταση του φωτός στη θέση αυτή θα δίνεται από τη (σχ. 3.5) όπου όμως τώρα οι κυματοσυρμοί n θα προέρχονται από ένα τμήμα της πηγής ενώ οι m από διαφορετικό. Λόγω όμως του εντελώς τυχαίου χρόνου εκπομπής τους η $\theta_m-\theta_n$ θα είναι και αυτή εντελώς τυχαία οπότε ο τρίτος όρος της (σχ. 3.5) θα είναι ίσος με το μηδέν. Τότε η συνολική ένταση I' θα είναι:

$$I' = I_1' + I_1' \tag{3.11}$$

όπου όπως και στη (σχ. 3.6), οι I_1', I_2' θα είναι οι εντάσεις που προέρχονται από τους επί μέρους δύο κλάδους του συμβολόμετρου.

Το τελικό συμπέρασμα που προκύπτει από την προηγούμενη μελέτη, μας οδηγεί στη διατύπωση των κανόνων:

α) Δέσμες φωτός της ίδιας συχνότητας που προέρχονται από τα ίδια τμήματα μιας πηγής, είναι μεταξύ τους τελείως σύμφωνες.

β) Δέσμες φωτός της ίδιας συχνότητας που προέρχονται από διαφορετικά τμήματα μιας πηγής, είναι μεταξύ τους τελείως ασύμφωνες.

Επίσης με βάση τη μελέτη που έγινε στο (ΠΑΡ/ΜΑ 2), μπορούμε να διατυπώσουμε και τον εξής κανόνα:

γ) Δέσμες φωτός διαφορετικής συχνότητας είναι μεταξύ τους τελείως ασύμφωνες.

Θα πρέπει να επαναλάβουμε, ότι οι κανόνες αυτοί ισχύουν όταν οι εντάσεις μετρούνται με κοινούς ανιχνευτές και το φως προέρχεται από χαοτικές πηγές.

ΘΕΜΑ 1

Σχετικιστική Οπτική

1.1 *Το πείραμα των Michelson - Morley. Επιβεβαίωση της ανυπαρξίας του 'αιθέρα'*

Αντικειμενικός μας σκοπός στα επόμενα, είναι να περιγράψουμε βήμα προς βήμα τον τρόπο με τον οποίο το πείραμα των Michelson - Morley ανέδειξε τελικά την ανυπαρξία της έννοιας του 'αιθέρα'. Πράγματι όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή του βιβλίου, η έννοια του 'αιθέρα' υπήρξε κυρίαρχη πριν, όμως και μετά την εγκαθίδρυση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας με κυρίαρχη ιδέα τα Η/Μ κύματα από τον Maxwell (περί το 1860). Πριν από αυτόν τα κύματα φωτός θεωρούνταν σαν ελαστικά κύματα, που διαδιδόταν σ' ένα υποθετικό μέσο που ονομαζόταν 'παγκόσμιος αιθέρας'. Μετά τον Maxwell η έννοια του 'αιθέρα' παρέμεινε. Μόνο που ο ίδιος έγινε φορέας της διάδοσης των Η/Μ κυμάτων και γενικότερα των Η/Μ πεδίων. Όπως περίπου και για την προκάτοχή του ιδέα, ο 'αιθέρας' αυτού του είδους ήταν ένα μέσο που πληρούσε όλο το χώρο του διαστήματος και διαπερνούσε όλα τα σώματα. Το γεγονός όμως ότι αποτελούσε ένα μέσο διάδοσης, δεν θα μπορούσε να μας αποκλείσει από το ενδεχόμενο να προσδιορίσουμε πειραματικά τη σχετική κίνηση των σωμάτων όπως των πηγών Η/Μ ακτινοβολίας ή των ανιχνευτών (ουσιαστικά των παρατηρητών) σε σχέση μ' αυτό το μέσο. Π.χ. οι ίδιοι βρισκόμενοι πάνω στη γη η οποία κινείται περί τον ήλιο με μια ορισμένη ταχύτητα, θα ήταν εύλογο να περιμένουμε ότι θα δεχόμασταν ένα 'αιθέριο άνεμο'.

Αν τελικά ο 'αιθέρας' ανιχνευόταν, θα μπορούσαμε να επισυνάψουμε σ' αυτόν ένα απόλυτο σύστημα συντεταγμένων (σ.σ.) με βάση την Νευτώνεια αρχή της σχετικότητας. Τότε οποιοδήποτε κινούμενο σ.σ. που θα συνδεόταν π.χ. με μια πηγή φωτός ή ένα ανιχνευτή θα μπορούσε να μελετηθεί σε σχέση με αυτό το απόλυτο σύστημα. Ήταν λοιπόν πολύ σημαντικό για την εποχή που διεξαγόταν αυτά τα πειράματα να γίνει κατανοητός και να επιβεβαιωθεί πειραματικά ο τρόπος με τον οποίο αλληλεπιδρούσε ο 'αιθέρας' με τα κινούμενα αντικείμενα. Και οι εκδοχές ήταν τρεις:

1) Ο 'αιθέρας' μεταφέρεται πλήρως από τα κινούμενα αντικείμενα. Π.χ. καθώς η γη κινείται, θα μετέφερε μαζί της και το σ.σ. του 'αιθέρα'.

2) Ο 'αιθέρας' μεταφέρεται μερικώς από τα κινούμενα αντικείμενα, αποκτώντας μια ταχύτητα $a \cdot \upsilon$. Όπου με υ συμβολίζουμε την ταχύτητα που έχει το κινούμενο σώμα σε σχέση με το απόλυτο σ.σ. Ο παράγοντας a ήταν ένα είδος συντελεστή τριβής με τιμή μικρότερη της μονάδας.

3) Ο 'αιθέρας' δεν διαταράσσεται κατά οποιονδήποτε τρόπο από τα κινούμενα σ' αυτόν αντικείμενα.

Εκδοχή πρώτη: Πειραματικά είχε διαψευσθεί και μάλιστα πολύ πρώιμα (το 1727) από το Βρετανό αστρονόμο J.Bradley με βάση το γνωστό πείραμά του για τη μέτρηση της ταχύτητας του φωτός (βλ. Εισαγωγή και (Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα ΠΑΡ/ΜΑ 1)). Αν στο πείραμα αυτό υποθέταμε ότι ο 'αιθέρας' ο οποίος είναι φορέας της διάδοσης του φωτός (των Η/Μ κυμάτων) μεταφέρεται με την κίνηση της γης, που κινείται με ταχύτητα υ περί τον ήλιο, τότε το φως από ένα αστέρι που μπαίνει στο τηλεσκόπιο παρατήρησης μέσω του αντικειμενικού του φακού, θα εστιαζόταν ακριβώς στο κέντρο του προσοφθάλμιου φακού και όχι σε διαφορετική θέση. Και αυτό που θα βλέπαμε με το μάτι μας (μέσω του προσοφθάλμιου του τηλεσκοπίου) θα ήταν η πραγματική θέση του αστέρα.

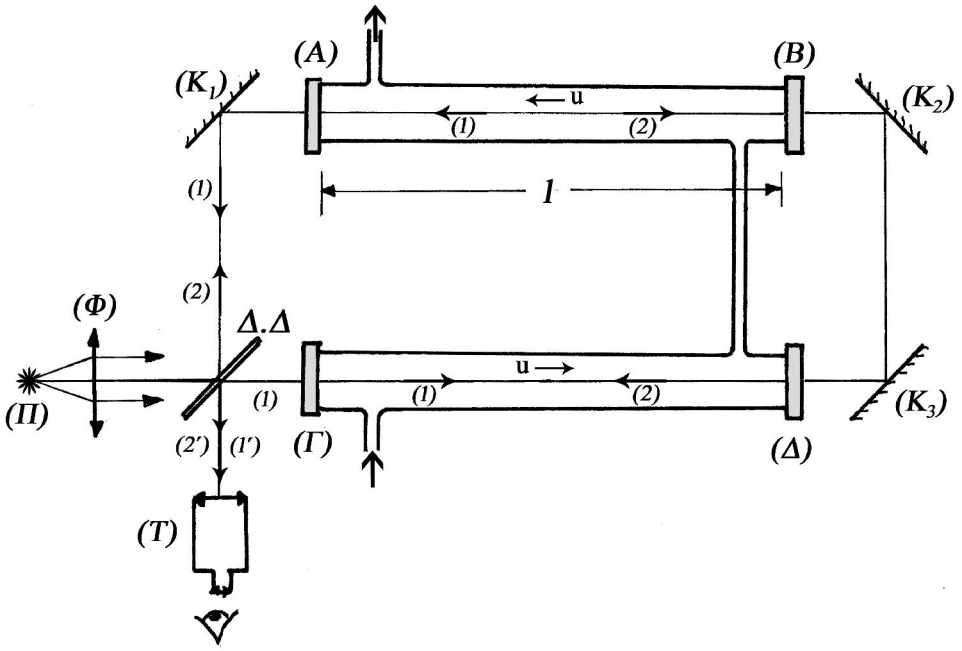
Όμως αυτό δεν συμβαίνει. Το φως εστιάζεται σε διαφορετική θέση (παραπλήσια) από αυτή του κέντρου του προσοφθάλμιου και κατά τα γνωστά για να τοποθετήσουμε το είδωλο στο κέντρο του πρέπει να στρέψουμε τον άξονα του τηλεσκοπίου κατά τη γωνία a που δίνεται από τη σχέση: $\tan a = \upsilon / c$.

Εκδοχή δεύτερη: Που αφορούσε την υπόθεση της μερικής μεταφοράς του 'αιθέρα' από τα κινούμενα αντικείμενα. Θ' αναφερθούμε με συντομία στο πείραμα και τ' αποτελέσματά του, που εκτελέστηκε για τη συγκεκριμένη περίπτωση από τον H. Fizeau το 1851. Η πειραματική διάταξη* αποτελείται (Σχ. 1.1.1) από δύο παράλληλους γυάλινους σωλήνες $AB, \Gamma\Delta$ κενούς εσωτερικά, οι οποίοι στα άκρα τους φράζονται από διαφανή γυάλινα παράθυρα (οπτικά επίπεδα). Κοντά στις άκρες τους B, Δ επικοινωνούν με γυάλινο λεπτό σωλήνα και στις άλλες τους άκρες A, Γ υπάρχει μια είσοδος και μια έξοδος από τον ίδιο σωλήνα. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα των σωλήνων $AB, \Gamma\Delta$ μπορεί να τον διατρέχει νερό με ταχύτητα π.χ. u η οποία ελέγχεται. Αριστερά του παράθυρου (Γ) και κατά μήκος του άξονα $\Gamma\Delta$ υπάρχει πηγή φωτός (Π) ορισμένων διαστάσεων, που εκπέμπει μονοχρωματικό φως και η οποία είναι τοποθετημένη στο μπρος εστιακό επίπεδο ενός θετικού φακού (Φ). Μεταξύ του φακού (Φ) και του παράθυρου (Γ) είναι τοποθετημένος σε γωνία 45^0 διαχωριστής δέσμης $(\Delta\Delta)$. Οπότε κατά την πρόσπτωσή της η δέσμη διαχωρίζεται σε δύο τις (1) και (2) ίσης έντασης, οι οποίες μπορούν να διανύσουν με αντίθετες κατευθύνσεις το όλο σύστημα με τη βοήθεια των κατόπτρων $(K_1),(K_2),(K_3)$. Τελικά η δέσμη $(1)'$ μέσω του $(\Delta\Delta)$ και η $(2)'$ ανακλώμενη από τον $(\Delta\Delta)$ έρχονται σε επαλληλία και εφ' όσον είναι σύμφωνες μπορούμε να έχουμε φαινόμενα συμβολής.

* I. V. Savelyev: 'Physics' . Vol. II (Ch. 21). Mir Pub. Moscow. Second printing: (1985).

Δηλ. να εντοπίσουμε με τη βοήθεια του τηλεσκοπίου *(Τ)* κροσσούς συμβολής. Επειδή η πηγή *(Π)* έχει μια σχετική έκταση, οι σχηματιζόμενοι κροσσοί (παρατηρήσιμοι μέσω του τηλεσκοπίου) θα είναι κροσσοί Haidinger κυκλικής συμμετρίας, μεγάλης ευκρίνειας αλλά μικρής λαμπρότητας.

Το επιθυμητό είναι να υπολογίσουμε τη διαφορά του οπτικού δρόμου μεταξύ των δεσμών (1) και (2), για την περίπτωση που στο σύστημα των σωλήνων ρέει νερό με ταχύτητα u. Η διαφορά αυτή θα υπολογιστεί κατά μήκος των σωλήνων



(Σχ. 1.1.1)

AB και $ΓΔ$, μήκους ο καθένας ίσο με l επειδή τα υπόλοιπα τμήματα της οπτικής διαδρομής είναι ίδια. Θεωρούμε λοιπόν ότι υ είναι η ταχύτητα του φωτός στο νερό σε σχέση με τον 'αιθέρα'. Και αν δεχθούμε ότι ο 'αιθέρας' δεν παρασύρεται κατά μήκος της ροής του νερού, τότε η ταχύτητα του φωτός σε σχέση με τη διάταξη θα είναι η υ. Ας υποθέσουμε όμως (όπως στο πείραμα αυτό), ότι το νερό κατά την κίνησή του παρασύρει μερικώς τον 'αιθέρα' με μια ταχύτητα au (όπου a μια σταθερή τριβής). Τότε η ταχύτητα του φωτός για τη δέσμη (1) θα είναι $\upsilon + au$ ενώ για την (2) $\upsilon - au$. Επομένως η δέσμη (1) θα καλύπτει τη διαδρομή $2l$ (l για κάθε σωλήνα) σε χρόνο $t_1 = 2l/(\upsilon + au)$ ενώ η (2) το ίδιο μήκος $2l$ σε χρόνο $t_2 = 2l/(\upsilon - au)$.

Επομένως η τελική διαφορά οπτικού δρόμου θα είναι $Δl = cΔt$. Και αν ο $Δl$ διαιρεθεί με λ_0 (το μ.κ. που εκπέμπει η πηγή *(Π)*), τότε το πρότυπο συμβολής που θα βλέπουμε όταν $u = 0$ (μηδενική ροή νερού στους σωλήνες), θα μετακινηθεί κατά

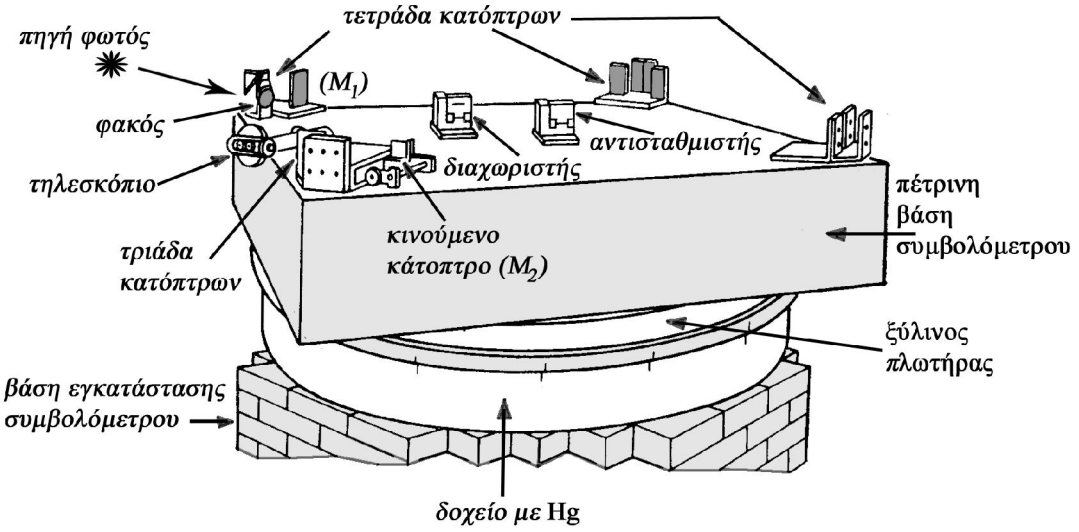
$\Delta N = c\Delta t/\lambda_0$ κροσσούς από τη στιγμή που το νερό αρχίσει να ρέει με ταχύτητα u.

Θα έχουμε: $\Delta N = \dfrac{c\Delta t}{\lambda_0} = \dfrac{c\left(t_2 - t_1\right)}{\lambda_0} = \dfrac{c}{\lambda_0}\left(\dfrac{2l}{\upsilon - au} - \dfrac{2l}{\upsilon + au}\right)$. Και τελικά:

$$\Delta N = \frac{4clau}{\lambda_0\left(\upsilon^2 - a^2u^2\right)} \tag{1.1.1}$$

Και άρα έχει αποδειχθεί από το πείραμα του Fizeau ότι θα υπάρχει μετακίνηση των κροσσών για την περίπτωση που ο 'αιθέρας' (αν όντως υφίσταται), παρασύρεται μερικώς κατά μήκος του ρέοντος ύδατος. Υπολόγισε μάλιστα ότι $a = 1 - \left(1/n^2\right)$ όπου n ο δ.δ του νερού. Και εφόσον $n = 1.33$ τότε $a \simeq 0.43$. Για το συγκεκριμένο πείραμα αν λάβουμε $c = 3\times10^8\,\mathrm{m/s}$, $l = 1\mathrm{m}$, $a \simeq 0.43$, $u = 20\,\mathrm{m/s}$, $n = 1.33$, $\lambda_0 = 0.5\times10^{-6}\,\mathrm{m}$ και θεωρήσουμε ότι $a^2u^2 \ll$ σε σχέση με το υ^2, θα βρούμε τελικά από τη (σχ. 1.1.1) ότι: $\Delta N \simeq 0.4$. Δηλ. μια μετατόπιση περίπου ίση με το μισό του εύρους του ενός κροσσού. Και παρά το ότι η μετακίνηση αυτή στο πρότυπο συμβολής ήταν μετρήσιμη μέσω της πειραματικής διάταξης, τελικά δεν παρατηρήθηκε.

Εκδοχή τρίτη: Όσον αφορά το ότι ο 'αιθέρας' δεν παρασύρεται καθόλου και κατά οποιοδήποτε τρόπο από τα κινούμενα σ' αυτόν αντικείμενα, έρχεται να δώσει

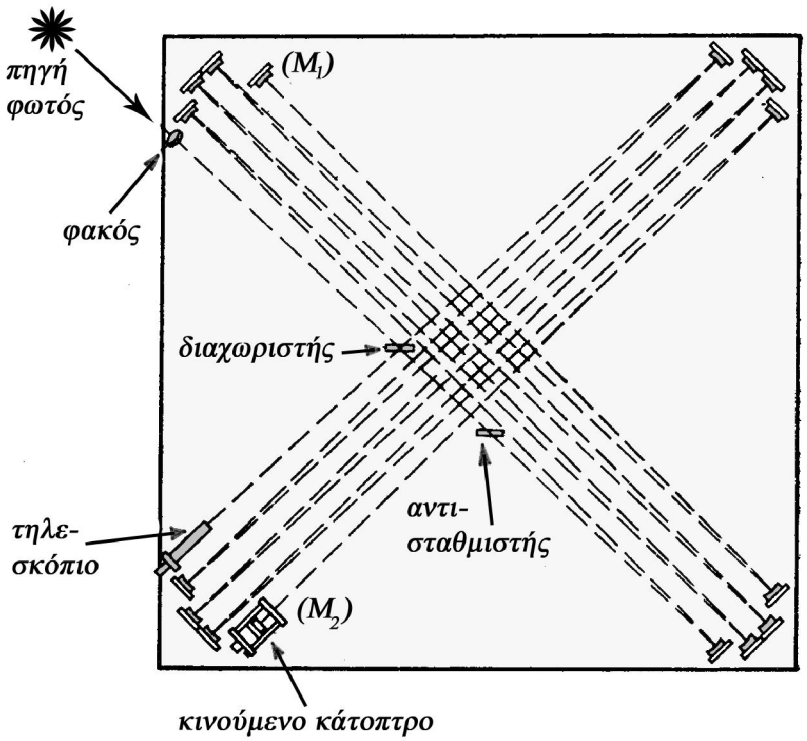


(Σχ. 1.1.2)

απάντηση το πείραμα των Michelson-Morley το οποίο και περιγράφεται στα επόμενα. Το πείραμα εκτελέστηκε αρχικά από τον Michelson το 1881 με επιδίωξη ν'

ανιχνεύσει τον 'αιθερικό άνεμο' κατά την κίνηση της γης σε σχέση με τον ακίνητο 'αιθέρα'. Το ίδιο πείραμα επαναλήφθηκε το 1887 σε συνεργασία με τον Morley και με τη βοήθεια μιας αρκούντως βελτιωμένης διάταξης που αφορούσε το συμβολόμετρο του Michelson (βλ. § 6.6) και της οποίας ορισμένα από τα τεχνικά χαρακτηριστικά περιγράφουμε στα επόμενα (Σχ. 1.1.2).

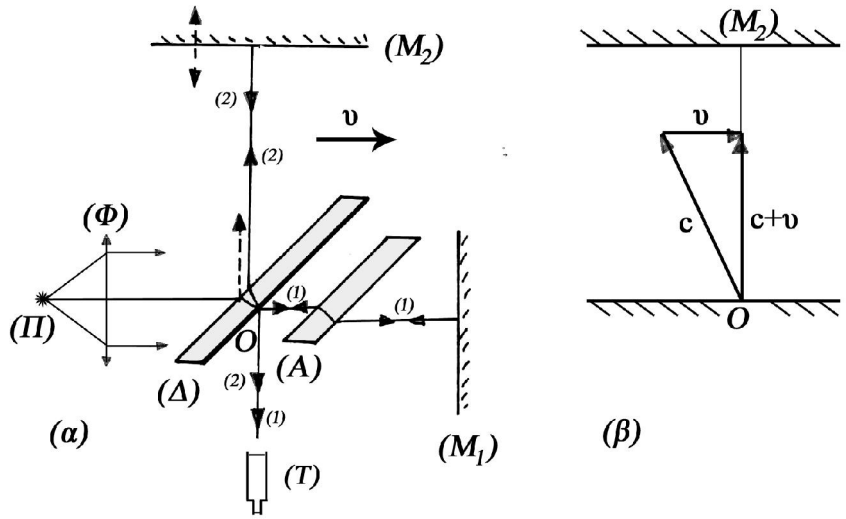
Στο πάνω μέρος μιας κτιστής ανθεκτικής βάσης είχε τοποθετηθεί ένα μεταλλικό κυλινδρικό δοχείο γεμάτο με υδράργυρο (Hg). Στην επιφάνεια του υδραργύρου 'κάθισε' ένας ξύλινος κυλινδρικός πλωτήρας ίδιων διαστάσεων, ο οποίος – όπως ήταν φυσικό – θα μπορούσε να περιστραφεί χωρίς τριβές (δεδομένου ότι ήταν σε επαφή με τον υδράργυρο) κατά βούληση μέχρι και 360^0 περί κατακόρυφο άξονα. Πάνω στον ξύλινο πλωτήρα, τοποθετήθηκε μια μεγάλου βάρους επίπεδα λειασμένη, πέτρινη ογκώδης πλάκα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Η τελευταία θ' αποτελούσε τη βάση, όπου και θα τοποθετούνταν τα οπτο-μηχανικά συστήματα του συμβολόμετρου. Και θα έπαιζε το ρόλο – λόγω του βάρους της – αντιδονητικού συστήματος για την υπερκείμενη διάταξη.



(Σχ. 1.1.3)

Όπως ήδη γνωρίζουμε (§ 6.6), μια συνήθης διάταξη συμβολόμετρου Michelson (Σχ. 1.1.4α), περιλαμβάνει τα επίπεδα κάτοπτρα: (M_1) (που είναι σταθερό) και το κινούμενο (M_2). Τα δύο κάτοπτρα βρίσκονται μεταξύ τους σε ορθογώνια θέση

και έστω ότι ισαπέχουν από το σημείο O διαχωρισμού της προσπίπτουσας δέσμης στον διαχωριστή (Δ). (Π) είναι μια πηγή φωτός (όχι πολύ εκτεταμένη) και (Φ) ένας φακός με την πηγή φωτός στο εμπρός του εστιακό επίπεδο. (A) είναι ο αντισταθμιστής σε ρόλο εξισορρόπησης του οπτικού δρόμου μεταξύ των δύο προκυπτουσών δεσμών, τις οποίες λαμβάνουμε να εκκινούν από το σημείο O. Η δέσμη (2) ανακλώμενη στην πίσω επιφάνεια του διαχωριστή και στο κάτοπτρο (M_2) επανακάμπτει και διερχόμενη ξανά από τον διαχωριστή κατευθύνεται προς ένα τηλεσκόπιο (T) προσαρμοσμένο για παρατήρηση στο άπειρο. Η δέσμη (1) μέσω του αντι-



(Σχ. 1.1.4)

σταθμιστή (A) ανακλάται στο κάτοπτρο (M_1) και ανακλώμενη στο (Δ) ακολουθεί τη διαδρομή της (2) προς το τηλεσκόπιο ερχόμενη σε επαλληλία με τη δέσμη του κλάδου (2). Και εφόσον οι δύο δέσμες είναι σύμφωνες, μέσω του τηλεσκοπίου παρατηρούνται κροσσοί συμβολής.

Σημείωση

Με τα κάτοπτρα $(M_1),(M_2)$ σε ορθογώνια θέση, οι παρατηρούμενοι κροσσοί θα είναι οι κυκλικής συμμετρίας κροσσοί Haidinger επειδή η πηγή δεν είναι σημειακή, αλλά έχει κάποια έκταση. Για το λόγο αυτό οι σχηματιζόμενοι κροσσοί θα έχουν αρκετά μεγάλη φωτοαντίθεση όχι όμως μεγάλη λαμπρότητα, όπως θα γινόταν αν η πηγή ήταν εκτεταμένη Στο (Σχ. 1.1.4α) σχεδιάζονται οι διαδρομές των διαταραχών που βαίνουν κάθετα προς τα κάτοπτρα (M_1), (M_2) και όχι αυτές που παρουσιάζουν κλίση.

Για λόγους ακρίβειας στο συμβολόμετρο των Michelson-Morley του (Σχ. 1.1.2), οι δύο δέσμες διανύουν πολύ μεγαλύτερο οπτικό δρόμο, ανακλώμενες διαδοχικά σε τρία επιπλέον κάτοπτρα μέχρις ότου καταλήξουν στο τηλεσκόπιο. Κατά τα άλλα οι διαδρομές τους είναι ακριβώς οι ίδιες όπως και αυτών που περιγράψαμε προηγουμένως για το απλό συμβολόμετρο. Όσο για τη λεπτομερή τους διαδρομή, αυτή φαίνεται στο (Σχ. 1.1.3).

Το πείραμα των Michelson-Morley στηρίζεται τελικά στην εξής λογική. Υποθέτουμε ότι η διεύθυνση του βραχίονα OM_1 (Σχ. 1.1.4α) συμπίπτει με τη διεύθυνση κίνησης της γης σχετικά με τον ακίνητο 'αιθέρα'. Άρα και με την προϋπόθεση ότι οι βραχίονες OM_1, OM_2 είναι ίσοι, ο χρόνος t_1 που χρειάζεται η δέσμη να διανύσει τη διαδρομή OM_1O είναι διαφορετικός από το χρόνο t_2 προκειμένου να διανυθεί η απόσταση OM_2O. Επομένως μεταξύ των δύο δεσμών στην έξοδό τους από το συμβολόμετρο, θα υφίσταται μια διαφορά οπτικού δρόμου. Στη θέση που βρίσκεται το συμβολόμετρο (ακριβώς όπως το περιγράψαμε προηγουμένως) και εφόσον όπως ήδη αναφέραμε υφίσταται συμφωνία μεταξύ των δύο δεσμών, μέσω του τηλεσκοπίου θα παρατηρήσουμε ένα πρότυπο (κυκλικής συμμετρίας) κροσσών συμβολής.

Η διαφορά δρόμου μεταξύ των δύο δεσμών με αναφορά το σημείο O θα δίνεται κατά τα γνωστά από την παρακάτω σχέση:

$$L = c\left(t_1 - t_2\right) \tag{1.1.2}$$

Και για να την υπολογίσουμε, θα πρέπει να εκφράσουμε αναλυτικά τους χρόνους t_1, t_2. Όσον αφορά για το χρόνο t_1 έχουμε ήδη υποθέσει ότι ο βραχίονας OM_1 του συμβολόμετρου, είναι προσανατολισμένος κατά τη διεύθυνση της κίνησης της γης που κινείται με ταχύτητα υ σε σχέση με τον ακίνητο 'αιθέρα'. Επίσης σε σχέση με τον 'αιθέρα' η ταχύτητα του φωτός είναι c και η διάταξη βρίσκεται μέσα στον αέρα που ο δ.δ. είναι περίπου ίσος με τη μονάδα. Τότε η ταχύτητα με την οποία το φως διανύει τη διαδρομή OM_1 σε σχέση με το όργανο θα είναι: $c+\upsilon$ ενώ για τη διαδρομή M_1O : $c-\upsilon$. Τότε ο χρόνος t_1 που χρειάζεται ώστε να διανυθεί η διαδρομή OM_1O θα δίνεται από τη σχέση:

$$t_1 = \frac{l}{c+\upsilon} + \frac{l}{c-\upsilon} = \frac{2lc}{c^2-\upsilon^2} = \frac{2l}{c}\frac{1}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \simeq \frac{2l}{c}\left(1+\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \tag{1.1.3}$$

Τα παραπάνω λαμβάνοντας υπόψη μας ότι: $1/(1-x) \simeq 1+x, \quad \left(x = \upsilon^2/c^2\right)$. Και επειδή η ταχύτητα της γης είναι: $\upsilon \simeq 3\times10^4$ m/s και η ταχύτητα του φωτός: $c \simeq 3\times10^8$ m/s $x = \upsilon^2/c^2 \simeq 10^{-8} \ll$.

Για να υπολογίσουμε τώρα τις ταχύτητες με τις οποίες διανύονται οι διαδρομές OM_2 και M_2O, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας το (Σχ. 1.1.4β). Με βάση τα δεδομένα, η ταχύτητα με την οποία διανύεται αυτός ο κλάδος από το φως (λόγω της κίνησης της γης) δεν είναι η $\mathbf{c}$ αλλά η $\mathbf{c}+\boldsymbol{\upsilon}$. Που σημαίνει ότι το μέτρο της είναι $|\mathbf{c}+\boldsymbol{\upsilon}| = \sqrt{c^2-\upsilon^2}$. Επομένως ο χρόνος t_2 θα δίνεται από τη σχέση:

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}} = \frac{2l}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}} \simeq \frac{2l}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \tag{1.1.4}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση: $1/\sqrt{1-x} \simeq 1+x/2, \; x \ll$. Επομένως από τις (σχ. 1.1.2,3,4) θα έχουμε:

$$L = 2l\left[\left(1+\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\right] = l\frac{\upsilon^2}{c^2} \tag{1.1.5}$$

Αν τώρα στρέψουμε το συμβολόμετρο από τη βάση του κατά 90^0, τότε η διαφορά οπτικού δρόμου L' απλά θ' αλλάξει πρόσημο δηλ. $L' = -L$. Και η διαδικασία αυτή θα έχει σαν αποτέλεσμα να μας δώσει συνολική μεταβολή οπτικού δρόμου $L'' = L - L' = 2L$ (μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης θέσης του συμβολόμετρου). Επομένως κατά τη διάρκεια της στροφής του οργάνου (βλέποντας μέσω του τηλεσκοπίου), θα παρατηρήσουμε μετακίνηση των κροσσών στο πρότυπο συμβολής. Δηλ. θα μετακινηθούν ΔN κροσσοί συμβολής και ο αριθμός τους θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta N = \frac{2L}{\lambda_0} = \frac{2l}{\lambda_0}\frac{\upsilon^2}{c^2} \tag{1.1.6}$$

όπου λ_0 το μ.κ. του φωτός που εκπέμπει η πηγή που φωτίζει το συμβολόμετρο. Με βάση τα αριθμητικά δεδομένα: $\lambda_0 = 0.59\times10^{-6}$ m, $l = 11$m, $c = 3\times10^8$ m/s, $\upsilon = 3\times10^4$ m/s οι Michelson-Morley υπολόγισαν ότι θα έπρεπε να προκύψει μετατόπιση $\Delta N \simeq 0.4$ του κροσσού. Η τιμή αυτή για το συμβολόμετρό τους ήταν μετρήσιμη, επειδή το τελευταίο μπορούσε να μετρήσει έως και $\Delta N \simeq 0.01$ του κροσ-

σού. Η μετατόπιση αυτή ($\Delta N \simeq 0.4$) τελικά, θα μπορούσε να επιβεβαιώσει πειραματικά την ύπαρξη του 'αιθερικού ανέμου' που θα προκαλούνταν υποτίθεται από την κίνηση της γης σε σχέση με τον ακίνητο 'αιθέρα'. Ή για έναν ακίνητο παρατηρητή πάνω στη γη, από την κίνηση του 'αιθέρα'.

Το πείραμα των Michelson-Morley επαναλήφθηκε πολλές φορές για μεγάλο χρονικό διάστημα (περί τα δώδεκα έτη) σε διάφορες συνθήκες, εποχές καθώς και από διάφορους ερευνητές. Το αποτέλεσμα όμως ήταν ακριβώς το ίδιο. Δεν βεβαιωνόταν μετακίνηση των κροσσών συμβολής. Και το αβίαστο συμπέρασμα που προέκυπτε από την όλη διαδικασία ήταν ότι δεν υφίσταται κίνηση του 'αιθέρα' και επομένως η αποδοχή του ήταν μια απατηλή ιδέα. Επίσης όλες οι προσπάθειες που έγιναν από ερευνητές να ερμηνεύσουν το αρνητικό αποτέλεσμα του πειράματος, χωρίς όμως ν' ανασκευάσουν την υπόθεση της ύπαρξης του 'αιθέρα' δεν απέδωσαν. Και ήταν τελικά ο A. Einstein το 1905 ο οποίος μετά από ενδελεχή έλεγχο των πειραματικών δεδομένων και των αποτελεσμάτων του πειράματος των Michelson-Morley που κατάληξε στο συμπέρασμα ότι ο 'παγκόσμιος αιθέρας' με τις ιδιότητες που του δινόταν μέχρι τότε, δεν υπήρχε στην πραγματικότητα και δεν χρειαζόταν καν να θεωρηθεί σαν φορέας διάδοσης των Η/Μ κυμάτων ή σαν ένα απόλυτο σ.σ.

Το γεγονός αυτό αποτέλεσε αφορμή για τον Einstein να επεκτείνει τη μηχανική αρχή της σχετικότητας για όλα πλέον τα φυσικά φαινόμενα, περιλαμβανομένων και των ηλεκτρομαγνητικών. Και βέβαια με βάση τα νέα πειραματικά δεδομένα, εξέφρασε αξιωματικά το ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, χωρίς να εξαρτάται από την κίνηση σ' αυτά των πηγών (Η/Μ ακτινοβολίας) ή των ανιχνευτών (παρατηρητών). Οι προαναφερόμενες δύο αξιωματικά τιθέμενες από τον Einstein προτάσεις, αποτέλεσαν τα θεμέλια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΕΘΣ). Και συνιστούν τη βάση της ερμηνείας των φαινομένων της ***Σχετικιστικής Οπτικής (Relativistic Optics)*** ή ***Οπτικής των κινουμένων σωμάτων (Moving - Media Optics)***. Ορισμένα από αυτά θα περιγράψουμε στα επόμενα, αφού πρώτα αναδείξουμε τις νέες σχέσεις μετασχηματισμών που ισχύουν για την (ΕΘΣ) και οι οποίοι ονομάζονται μετασχηματισμοί Lorentz.

1.2 *Αρχές της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας του Einstein*. Σχετικιστικά φαινόμενα στην Οπτική*

Τα δύο θεμελιώδη αξιώματα της (ΕΘΣ) που διατυπώθηκαν από τον Einstein το 1905 είναι τα εξής:

---

* Ματθαίου Μιχαλοδημητράκη: 'Εισαγωγή στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας και τη Σχετικιστική Δυναμική' . Έκδοση του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκηςνίκης. Θεσσαλονίκη 1985.

(1) Όλοι οι φυσικοί νόμοι έχουν την ίδια μορφή για όλα τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων.

(2) Η ταχύτητα της Η/Μ ακτινοβολίας στο κενό είναι η ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων.

Π.χ. όσον αφορά το πρώτο αξίωμα, οι εξισώσεις του Maxwell έχουν την ίδια μορφή, για κάθε αδρανειακό σ.σ. Και όσον αφορά το δεύτερο – που εδώ μας αφορά περισσότερο – η μέτρηση της ταχύτητας του φωτός θα έχει την ίδια τιμή έστω και αν η πηγή του φωτός κινείται σε σχέση με τον παρατηρητή ή αν ο παρατηρητής κινείται σε σχέση με την πηγή. Και η αρχή αυτή έρχεται σε συμφωνία με το αρνητικό αποτέλεσμα του πειράματος των Michelson-Morley εξ αιτίας του γεγονότος ότι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός για κάθε κλάδο του συμβολόμετρου είναι ίση με c ανεξάρτητα αν το συμβολόμετρο κινείται. Επομένως δεν υφίσταται διαφορά φάσης (επειδή οι χρόνοι t_1, t_2 είναι οι ίδιοι) και κατά συνέπεια δεν θα παρατηρηθεί και μετακίνηση των κροσσών συμβολής.

Θα εξετάσουμε τώρα τις συνέπειες του δευτέρου αξιώματος και θα δούμε πλέον ότι οι σχέσεις μετασχηματισμού μεταξύ δύο αδρανειακών σ.σ. δεν είναι αυτές του Newton (οι οποίες και το παραβιάζουν), αλλά αυτές που ονομάζονται σχέσεις μετασχηματισμού Lorentz*. Για το λόγο αυτό θα θεωρήσουμε δύο παρατηρητές που κινούνται μεταξύ τους με μια σχετική ταχύτητα υ. Στον πρώτο προσάπτουμε το ορθογώνιο δεξιόστροφο σ.σ. $Oxyz$ και στον δεύτερο το $O'x'y'z'$ (Σχ. 1.2.1). Θα μπορούσε το πρώτο να είναι ακίνητο και το δεύτερο να κινείται με ταχύτητα υ ή αντίστροφα. Οι άξονες $Ox, O'x'$ 'ταυτίζονται' και η σχετική κίνηση γίνεται ως προς αυτούς. Επίσης και οι άλλοι άξονες είναι παράλληλοι μεταξύ τους.

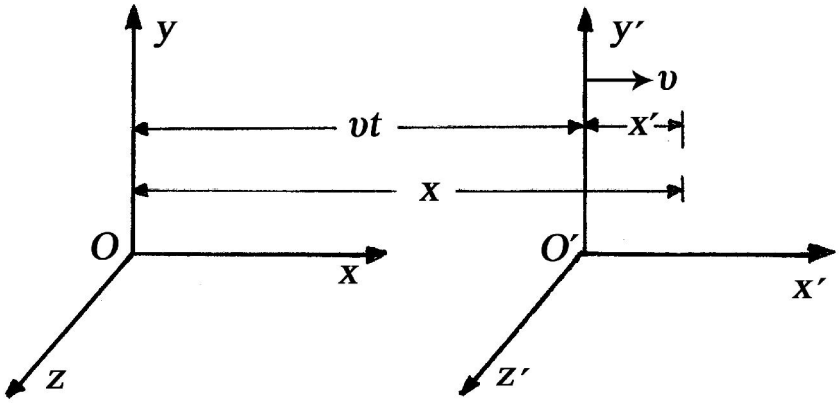
Υποθέτουμε ότι οι αρχές O, O' των σ.σ. στο χρόνο $t = 0$ ταυτίζονται. Τότε σε χρόνο t η απόσταση OO' θα είναι ίση με υt και οι σχέσεις μετασχηματισμού κατά Newton θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$x = x' + \upsilon t' \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t'$$

όπου η σχέση $t = t'$ δηλώνει ότι τα πανομοιότυπα ρολόγια των δύο παρατηρητών στα δύο σ.σ. δείχνουν τον ίδιο χρόνο, ανεξάρτητα από τη σχετική τους κίνηση. Τότε π.χ. για οτιδήποτε κινείται στο σ.σ. $O'x'y'z'$ με την ταχύτητα $(dx'/dt') = c$ του φωτός, από τη σχέση $x = x' + \upsilon t'$ βρίσκουμε: $\frac{dx}{dt'} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + \upsilon$ που σημαίνει για το σ.σ.

* G. R. Fowles: 'Introduction to Modern Optics' Dover Pub. Inc. N.Y. Second Ed . (1975) (Appendix I).

$Oxyz$ η ταχύτητά του θα είναι $\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt'}+\upsilon=c+\upsilon$, γεγονός που παραβιάζει το δεύτερο αξίωμα της (ΕΘΣ), που απαιτεί την ίδια ταχύτητα διάδοσης του φωτός στα δύο σ.σ. ανεξάρτητα από τη σχετική τους κίνηση. Το πρόβλημα δηλ. τελικά είναι οι σχέσεις μετασχηματισμού του Newton οι οποίες θα πρέπει να τροποποιηθούν, προκειμένου να ισχύει το δεύτερο αξίωμα της (ΕΘΣ).



(Σχ. 1.2.1)

Η ανάδειξη αυτών των σχέσεων μετασχηματισμού θα γίνει με τη βοήθεια της διαφορικής εξίσωσης του Maxwell, που περιγράφει τη διάδοση των Η/Μ κυμάτων στο κενό και που αφορά κατά τα γνωστά τις συνιστώσες U των πεδίων $\mathbf{E},\mathbf{B}$ (βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά κύματα (σχ. 2.1.14.10)). Η εξίσωση αυτή σε μια διάσταση (εδώ κατά τη διεύθυνση x) έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0 \tag{1.2.1}$$

με ταχύτητα διάδοσης c στο σ.σ. $Oxyz$. Τότε η απαίτηση του δευτέρου αξιώματος είναι η εξίσωση να παραμένει αμετάβλητη (invariant) και για το σ.σ. $O'x'y'z'$. Δηλ.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}=0 \tag{1.2.2}$$

(όπου η ταχύτητα του φωτός στον παράγοντα $1/c^2$ παραμένει η ίδια). Και αυτό θα συμβαίνει μόνο όταν μεταξύ των x,t και x',t' υφίσταται μια γραμμική σχέση μετασχηματισμού της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}t' \\ t &= a_{21}x' + a_{22}t' \end{aligned}\right\} \tag{1.2.3}$$

Θα πρέπει να ειπωθεί ότι δεν θα μπορούσαμε να επιλέξουμε μεταξύ των x,t και x',t' μια μη γραμμική σχέση μετασχηματισμού, επειδή τότε μια π.χ. ομαλή κίνηση στο ένα σ.σ. θα εμφανιζόταν στο δεύτερο σ.σ. σαν επιταχυνόμενη.

Σκοπός μας στα επόμενα είναι να προσδιορίσουμε τις τιμές των συντελεστών a_{ij} $i,j=1,2$. Και αυτό επιτυγχάνεται ως εξής: Επειδή ισχύουν οι (σχ. 1.2.1,2) τότε θα ισχύει και η:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} \tag{1.2.4}$$

Με τη βοήθεια κατόπιν των (σχ. 1.2.3) θα μετασχηματίσουμε τη (σχ. 1.2.4) σε ταυτότητα μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου μέλους της. Από αυτήν θα προκύψουν τρεις τον αριθμό εξισώσεις των συντελεστών a_{ij}. Μια τέταρτη εξίσωση θα προκύψει από την πρώτη εξίσωση των (σχ. 1.2.3), θέτοντας $x=0$. Τότε από το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων θα υπολογίσουμε τις τιμές των συντελεστών a_{ij}.

Πράγματι επειδή $x = x(x',t')$ και $t = t(x',t')$ θα έχουμε:

$\dfrac{\partial U}{\partial x'} = \dfrac{\partial U}{\partial x}\left(\dfrac{\partial x}{\partial x'}\right) + \dfrac{\partial U}{\partial t}\left(\dfrac{\partial t}{\partial x'}\right) \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial x'} = a_{11}\dfrac{\partial U}{\partial x} + a_{21}\dfrac{\partial U}{\partial t}$ λόγω του ότι από τις (σχ. 1.2.3)

βρίσκουμε: $\dfrac{\partial x}{\partial x'} = a_{11}$ και $\dfrac{\partial t}{\partial x'} = a_{12}$. Επίσης:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} = a_{11}\left[a_{11}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial x} + a_{21}\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}\right] + a_{21}\left[a_{11}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + a_{21}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right] \text{ ή}$$

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x'^2} = a_{11}^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{11}a_{21}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + a_{11}a_{21}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + a_{21}^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}$. Και τελικά:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} = a_{11}^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2a_{11}a_{21}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + a_{21}^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{1.2.5}$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} = a_{12}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2a_{22}a_{12}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + a_{22}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{1.2.6}$$

Τις (σχ. 1.2.5,6) αντικαθιστούμε στο δεύτερο μέλος της (σχ. 1.2.4) οπότε:

$$\begin{aligned} & a_{11}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2a_{11}a_{21}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + a_{21}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{a_{12}^2}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{2a_{22}a_{12}}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \frac{a_{22}^2}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \\ & = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Και για να ισχύει η εξίσωση αυτή θα πρέπει:

$$a_{11}^2 - \frac{a_{12}^2}{c^2} = 1 \quad (1.2.8) \qquad a_{21}^2 - \frac{a_{22}^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2} \quad (1.2.9) \qquad \text{και} \qquad 2a_{11}a_{21} - \frac{2a_{22}a_{12}}{c^2} = 0 \quad (1.2.10)$$

Επειδή επίσης μεταξύ των σ.σ. $Oxyz$, $O'x'y'z'$ ισχύει η σχέση: $x = x' + \upsilon t'$ τότε για $x = 0 \Rightarrow x' = -\upsilon t'$. Επίσης από την πρώτη των (σχ. 1.2.3) για $x = 0$ θα έχουμε: $a_{11}x' = -a_{12}t'$. Τότε: $a_{11}\left(-\upsilon t'\right) = -a_{12}t'$ οπότε:

$$a_{12} = \upsilon a_{11} \tag{1.2.11}$$

Το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων των (σχ. 1.2.8,9,10,11) με αγνώστους τους συντελεστές a_{ij} $i, j = 2$ επιλυόμενο μας δίνει τελικά:

$a_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$, $a_{12} = \dfrac{\upsilon}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$, $a_{21} = \dfrac{\upsilon}{c^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$, $a_{22} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$. Οπότε οι μετασχηματισμοί Lorentz στους οποίους οδηγούμαστε με βάση τις αρχές της (ΕΘΣ) είναι:

$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma\left(x' + \upsilon t'\right) \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{\upsilon}{c^2}x'\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{ή} \quad \left.\begin{aligned} x' &= \gamma\left(x - \upsilon t\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right) \end{aligned}\right\} \tag{1.2.12}$$

όπου: $\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}$. Και όσον αφορά τη δεύτερη ισοδύναμη ομάδα των μετασχηματισμών Lorentz, προέκυψε από την πρώτη, με βάση τις σχέσεις μετασχηματισμού:

$x \leftrightarrow x',\ y \leftrightarrow y',\ z \leftrightarrow z',\ \upsilon \leftrightarrow -\upsilon$.

Παράδειγμα

Μια πολύ γνωστή επιβεβαίωση της ισχύος των μετασχηματισμών Lorentz για σ.σ. που κινούνται μεταξύ τους με μια σταθερή ταχύτητα υ, είναι τα φαινόμενα της διαστολής του χρόνου και της συστολής του μήκους. Των οποίων συνέπεια είναι η ανάδειξη της ανυπαρξίας στη φύση απόλυτου χρόνου και χώρου αντίστοιχα, σε αντίθεση με τα προτεινόμενα της κλασσικής Νευτώνειας μηχανικής.

- ***Η διαστολή του χρόνου***

Θα θεωρήσουμε δύο παρατηρητές από τους οποίους ο πρώτος βρίσκεται σ' ένα 'ακίνητο' σ.σ. $Oxyz$ ενώ ο δεύτερος σε 'κινούμενο' σ.σ. $O'x'y'z'$, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ σε σχέση με το πρώτο. Για απλότητα, η κίνηση γίνεται κατά τη διεύθυνση των αξόνων x, x' ενώ οι άξονες y, y' και z, z' είναι παράλληλοι μεταξύ τους (Σχ. 1.2.1). Ο παρατηρητής στο κινούμενο σ.σ. μετράει τη χρονική διάρκεια $\Delta t' = t_2' - t_1'$ της εξέλιξης ενός φαινομένου μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1', t_2' (δηλ. με το ρολόι που βρίσκεται στο σ.σ. $O'x'y'z'$). Το πρόβλημα το οποίο τίθεται είναι: Ποια είναι η χρονική διάρκεια $\Delta t = t_2 - t_1$ του ίδιου φαινομένου όπως το βλέπει να εξελίσσεται ο ακίνητος παρατηρητής. του σ.σ. $Oxyz$.

Η επίλυση γίνεται με τη βοήθεια της τέταρτης των (σχ. 1.2.12) της πρώτης ομάδας των μετασχηματισμών Lorentz, θεωρώντας ότι ο κινούμενος παρατηρητής κατά τη διάρκεια της εξέλιξης του φαινομένου βρίσκεται στην ίδια σταθερή θέση $x' = x_0$. Τότε θα έχουμε: $t = \gamma\left(t' + \frac{\upsilon}{c^2}x'\right) = \gamma\left(t' + \frac{\upsilon}{c^2}x_0\right)$ $\left(\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}\right)$ και για $t' = t_1', t_2'$ $t = t_1, t_2$ και αφαίρεση των σχέσεων βρίσκουμε: $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' - t_1'\right) = \gamma\Delta t'$. Δηλ.

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}}$$

Από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε ότι ο παρατηρητής στο 'ακίνητο' σ.σ. μετράει (δηλ. με το ρολόι που βρίσκεται στο σ.σ. $Oxyz$ χρονική διάρκεια εξέλιξης του ίδιου φαινομένου μεγαλύτερη από αυτή που μετράει ο παρατηρητής του σ.σ. $O'x'y'z'$. Δηλ. $\Delta t > \Delta t'$. Και αυτό επειδή: $\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)} < 1$. Από το γεγονός αυτό προκύπτει και η έννοια της μη απολυτότητας του χρόνου με βάση τις αρχές της (ΕΘΣ).

- ***Συστολή του μήκους***

Έστω τώρα ότι ο παρατηρητής στο σ.σ. $O'x'y'z'$ και για μια συγκεκριμένη σταθερή χρονική στιγμή $t' = t = t_0$ μετράει το μήκος $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ μιας ράβδου προσανατολισμένης κατά τη διεύθυνση των αξόνων x, x'. Το πρόβλημα το οποίο τίθεται είναι το εξής: Ποιο είναι το μήκος της ράβδου όταν τώρα τη μετράει ο ακίνητος παρατηρητής του σ.σ. $Oxyz$.

Η επίλυση στην περίπτωση αυτή γίνεται με τη βοήθεια της πρώτης των (σχ. 1.2.12) της δεύτερης ομάδας των μετασχηματισμών Lorentz: $x' = \gamma\left(x - \upsilon t\right)$ και για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή όπως ήδη έχουμε αναφέρει. Τότε θα έχουμε για τις συντεταγμένες των άκρων της ράβδου x'_1, x'_2 στο σ.σ. $O'x'y'z'$ σε σχέση με αυτές των άκρων x_1, x_2 για το σ.σ. $Oxyz$: $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma\left(x_2 - x_1\right) = \gamma \Delta x$. Δηλ. τελικά:

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \left(\upsilon^2 / c^2\right)}$$

Από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε ότι ο παρατηρητής στο 'ακίνητο' σ.σ. μετράει μήκος ράβδου μικρότερο από αυτό που μετράει ο παρατηρητής στο 'κινούμενο' με ταχύτητα υ σ.σ. Και το τελευταίο επειδή: $\sqrt{1 - \left(\upsilon^2 / c^2\right)} < 1$. Από το γεγονός αυτό προκύπτει και η έννοια της μη απολυτότητας του χώρου με βάση τις αρχές της (ΕΘΣ).

Η πειραματική επιβεβαίωση των γεγονότων της συστολής του μήκους και της διαστολής του χρόνου για σ.σ. που κινούνται μεταξύ τους με μια ομαλή σταθερή ταχύτητα υ, δεν είναι εύκολο να γίνει για τις μικρές σχετικά ταχύτητες που αντιμετωπίζουμε στην καθημερινότητά μας. Π.χ. μια αρκετά μεγάλη ταχύτητα με την οποία κινείται ένα αυτοκίνητο σε σχέση με ένα ακίνητο παρατηρητή είναι η $\upsilon = 150\,\mathrm{Km/h}\,(\simeq 40\,\mathrm{m/s})$. Κάτω από αυτές τις συνθήκες και με τα δεδομένα ότι: $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ και $\sqrt{1 - x} \simeq 1 - \left(x/2\right)$, $x = \left(\upsilon / c\right)^2 \ll$, βρίσκουμε από τη σχέση $\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \left(\upsilon^2 / c^2\right)}$ ότι η διαφορά μήκους που θα πρέπει να μετρηθεί είναι της τάξης των $10^{-14}\,\mathrm{m}$. Το οποίο βέβαια δεν είναι μετρήσιμο με τα συνήθη όργανα μέτρησης που διαθέτουμε. Για το λόγο αυτό (προκειμένου να επιβεβαιωθούν οι συνέπειες των μετασχηματισμών του Lorentz), θα πρέπει ν' αναζητήσουμε φυσικά φαινόμενα για τα οποία η σχετική ταχύτητα κίνησης μεταξύ των επισυναπτόμενων σ.σ. πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός.

Το παράδειγμά μας* αφορά ένα είδος σωματιδίων τα οποία ονομάζονται μ-μεσόνια και σχηματίζονται λόγο της δράσης της κοσμικής ακτινοβολίας σε ύψος πολλών χιλιάδων μέτρων μέσα στην ατμόσφαιρα. Μεγάλος δε αριθμός τους ανιχνεύεται στην επιφάνεια της θάλασσας. Η ταχύτητά τους μετρήθηκε και βρέθηκε ότι είναι $\upsilon = 2.994\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$. Δηλ. είναι περίπου ίση με 0.998 της ταχύτητας του φωτός $(\upsilon = 0.998c)$. Και δεδομένου ότι τα μεσόνια αυτού του είδους ζουν κατά μέσο όρο χρόνο $t_0 \simeq 2\times10^{-6}\,\mathrm{s}$ πριν διασπαστούν περαιτέρω, κατά τη διάρκεια της ζωής τους διανύουν μια τροχιά μήκους $l = \upsilon t_0 = \left(2.994\times10^{8}\,\mathrm{m/s}\right)\times\left(2\times10^{-6}\,\mathrm{s}\right) \simeq 600\mathrm{m}$. Είναι όμως γνωστό ότι τα μεσόνια αυτά σχηματίζονται μέσα στην ατμόσφαιρα σε ύψος πολύ μεγαλύτερο από $600\mathrm{m}$. Τότε προκύπτει το εύλογο ερώτημα: Πως εμφανίζονται και ανιχνεύονται στην επιφάνεια της θάλασσας; Το παράδοξο αυτό γεγονός ερμηνεύεται λαμβάνοντας υπόψη τα πορίσματα της (ΕΘΣ) και που αφορούν συγκεκριμένα τη συστολή του μήκους και τη διαστολή του χρόνου.

Για την ερμηνεία τους θα λάβουμε υπόψη μας τη σχετική κίνηση μεσονίου-γης. Θα θεωρήσουμε εδώ σε πρώτη φάση σαν 'ακίνητο' σ.σ. $Oxyz$ αυτό του μεσονίου και σαν 'κινούμενο' $O'x'y'z'$ αυτό της γης με ταχύτητα υ (σχετικότητα μεταξύ των δύο σ.σ.). Το μεσόνιο στο σύστημα αναφοράς του σε χρόνο $t \simeq 2\times10^{-6}\,\mathrm{s}$ διανύει μια τροχιά μήκους $l_M = \upsilon t = \left(2.994\times10^{8}\,\mathrm{m/s}\right)\times\left(2\times10^{-6}\,\mathrm{s}\right) \rightarrow l_M \simeq 600\mathrm{m}$. Όπου το γεγονός εμφάνισης - εξαφάνισής του (διάρκεια ζωής), είναι ανεξάρτητο της κίνησής του. Τότε στο κινούμενο σ.σ. της γης $O'x'y'z'$ με ταχύτητα υ ως προς το $Oxyz$, το διανυόμενο μήκος της τροχιάς του μεσονίου δεν είναι l_M αλλά l_Γ. Όπου με βάση τον τύπο που αφορά τη συστολή του μήκους θα είναι: $l_M = l_\Gamma\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}$. Και με τα δεδομένα: $\upsilon = 0.998c$, $l_M \simeq 600\mathrm{m}$ βρίσκουμε ότι το διανυόμενο μήκος της τροχιάς του μεσονίου όπως φαίνεται από τη γη θα είναι: $l_\Gamma \simeq 600\Big/\sqrt{1-\left(0.998c/c\right)^2}$. Δηλ. $l_\Gamma \simeq 9500\mathrm{m}$. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι που ερμηνεύει το γεγονός ότι παρά τον μικρό χρόνο ζωής τους, τα μεσόνια αυτού του είδους κατορθώνουν να φθάσουν στην επιφάνεια της θάλασσας από σχετικά μεγάλα ύψη.

Ας θεωρήσουμε τώρα σαν 'ακίνητο' σ.σ. $Oxyz$ τη γη και σαν 'κινούμενο' σ.σ. $O'x'y'z'$ το μεσόνιο με ταχύτητα $\upsilon = 0.998c$ και με διάρκεια χρόνου ζωής του $t_M = 2\times10^{-6}\,\mathrm{s}$. Τώρα όμως για τον παρατηρητή στη γη, η διάρκεια ζωής του μεσονίου δεν θα είναι t_M αλλά t_Γ όπου κατά τα γνωστά μεταξύ τους υφίσταται η γνωστή

---

* Α.Δ. Μάζη: 'ΦΥΣΙΚΗ' Τόμος $3^{ος}$. (Μαγνητισμός - Ηλεκτρισμός - Ατομική και Πυρηνική φυσική). Βιβλιοπωλείο της Εστίας. Αθήναι 1974.

σχέση: $t_\Gamma = t_M \Big/ \sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}$. Δηλ. $t_\Gamma = \left(2\times10^{-6}\right)\Big/\sqrt{1-\left(0.998c/c\right)^2} = \left(2\times10^{-6}\right)\Big/0.063$. Δηλ. τελικά: $t_\Gamma \simeq 31.7\times10^{-6}\,\mathrm{s}$.

Επομένως για το σ.σ. της γης, η διάρκεια ζωής του μεσονίου είναι περίπου 16 φορές μεγαλύτερη από ότι στο δικό του σ.σ. Άρα το διανυόμενο μήκος της τροχιάς του μεσονίου όσον αφορά τον ακίνητο παρατηρητή στη γη θα είναι $l_\Gamma = \upsilon t_\Gamma$. Και με $\upsilon = 2.994\times10^8\,\mathrm{m/s}$, $t_\Gamma \simeq 31.7\times10^{-6}\,\mathrm{s}$ βρίσκουμε: $l_\Gamma \simeq 9500\mathrm{m}$. Που μας φανερώνει τελικά ότι και για τις δύο περιπτώσεις όσον αφορά το μήκος l_Γ, οδηγούμαστε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Σχετικιστικά φαινόμενα στην Οπτική

Επίμηκες (ακτινικό) φαινόμενο Doppler στα Η/Μ κύματα

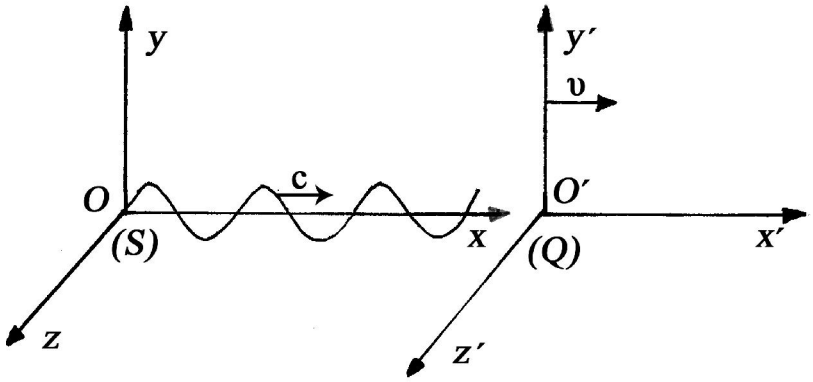
Στο (Κεφ. 1: Κύματα, (ΠΑΡ/ΜΑ 2)) ασχοληθήκαμε τη διάδοση των κυμάτων στα αέρια, περιγράψαμε το φαινόμενο Doppler. Αφορούσε τη μεταβολή της συχνότητας των διαδιδόμενων ηχητικών κυμάτων την οποία αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής (ή ένας ανιχνευτής), όταν η πηγή των κυμάτων ή ο ίδιος ο παρατηρητής ή ταυτόχρονα, κινούνται με μια ορισμένη ταχύτητα ο καθένας. Για την συγκεκριμένη αυτή περίπτωση υπήρχε μέσο διάδοσης. Ήταν ο αέρας στον οποίο θεωρούμε προσαρμοσμένο ένα σ.σ. ως προς το οποίο μετρούσαμε τις ταχύτητες πηγής και παρατηρητή. Όσον αφορά όμως τα Η/Μ κύματα, η διάδοσή τους δεν στηρίζεται σε κάποιο υλικό φορέα στον οποίο θα μπορούσαμε να προσαρτήσουμε ένα απόλυτο σ.σ. ως προς το οποίο θα μετρούσαμε τις ταχύτητες των πηγών φωτός ή του παρατηρητή. Όμως – όπως αποδεικνύεται και πειραματικά – φαινόμενο Doppler υφίσταται και για την περιοχή των Η/Μ κυμάτων. Στην προκειμένη περίπτωση όμως, οι μεταβολές στις συχνότητες θα εξαρτώνται από τις σχετικές ταχύτητες μεταξύ των πηγών και των παρατηρητών.

Σε πλήρη αναλογία με το (Σχ. 1.2.1), στο (Σχ. 1.2.2) θα έχουμε: Το σ.σ. $Oxyz$ στην αρχή O του οποίου βρίσκεται πηγή φωτός (S) η οποία προς τη διεύθυνση του άξονα x, εκπέμπει ένα μονοχρωματικό επίπεδο μέτ. κύματος. Η κυκλική του συχνότητα είναι ω και η ταχύτητά του c (διάδοση στο κενό). Παράλληλα με το σ.σ. $Oxyz$ κινείται με ταχύτητα υ το σ.σ. $O'x'y'z'$ στο οποίο βρίσκεται ο παρατηρητής (Q). Κάτω από αυτές τις συνθήκες θέλουμε να υπολογίσουμε ποια ακριβώς θα είναι η κυκλική συχνότητα ω' την οποία αντιλαμβάνεται (ανιχνεύει) για το εκπεμπόμενο από την πηγή (S) στην ίδια διεύθυνση (κατά μήκος του άξονα x') επίπεδο μετ. κύματος, ο παρατηρητής που βρίσκεται στο κινούμενο σ.σ. $O'x'y'z'$.

Για το σ.σ. $Oxyz$ η Η/Μ διαταραχή (επίπεδο μετ. κύματος) που διαδίδεται προς τη διεύθυνση x γράφεται κατά τα γνωστά με τη μορφή:

$$E(x,t) = A\cos(\omega t - kx + a) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + a\right] \qquad (1.2.13)$$

$E(x,t)$ είναι η ένταση του ηλ. πεδίου, A το σταθερό της πλάτος, a η σταθερή του



(Σχ. 1.2.2)

φάση, ω η η κυκλική συχνότητα $(\omega = 2\pi\nu)$ (όπως ανιχνεύεται στο σ.σ. $Oxyz$) και c η ταχύτητα του φωτός. Οπότε με βάση το πρώτο αξίωμα της (ΕΘΣ), η μορφή του πεδίου στο σ.σ. $O'x'y'z'$ θα είναι η ίδια, όπως αυτή που περιγράφεται από τη (σχ. 1.2.13) στο σ.σ. $Oxyz$. Δηλ.

$$E(x',t') = A'\cos(\omega' t' - k'x' + a') = A'\cos\left[\omega'\left(t' - \frac{x'}{c}\right) + a'\right] \qquad (1.2.14)$$

Όπου τώρα ω' είναι η ανιχνευόμενη κυκλική συχνότητα στο σ.σ. $O'x'y'z'$. Δηλ. αυτή που καταγράφεται από τον παρατηρητή που συμμετέχει στην κίνηση αυτού του σ.σ. Όσο για την ταχύτητα διάδοσης στα δύο σ.σ. θα είναι η ίδια με βάση το δεύτερο αξίωμα της (ΕΘΣ).

Όμως με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Lorentz που μας δίνει η πρώτη ομάδα των (σχ. 1.2.12α,δ): $x = \gamma(x' + \upsilon t')$, $t = \gamma\left(t' + \frac{\upsilon}{c^2}x'\right)$. Και με την αντικατάστασή τους στη (σχ. 1.2.13), μπορούμε να πάρουμε από τη σχέση που μας δίνει το πεδίο $E(x,t)$ το ίδιο, συναρτήσει των x', y' δηλ. το $E(x',t')$. Πράγματι θα έχουμε:

$$E(x,t)=E(x',t')=A\cos\left[\omega\gamma\left(t'+\frac{\upsilon}{c^2}x'\right)-k\gamma\left(x'+\upsilon t'\right)+a\right]=$$
$$=A\cos\left\{\omega\left[\frac{t'+\left(\upsilon/c^2\right)x'}{\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}}-\frac{x'+\upsilon t'}{c\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}}\right]+a\right\} \qquad (1.2.15)$$

δεδομένου ότι: $k=\omega/c$ και $\gamma=1\Big/\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}$. Και μετά από απλοποιήσεις:

$$E(x',t')=A\cos\left[\omega\gamma\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)t'-k\gamma\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)x'+a\right]=$$
$$=A\cos\left[\omega\frac{1-\upsilon/c}{\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}}\left(t'-\frac{x'}{c}\right)+a\right] \qquad (1.2.16)$$

Όπου η τελευταία εξίσωση (σχ. 1.2.16), περιγράφει το επίπεδο μέτ. κύματος στο σ.σ. $O'x'y'z'$, όπως άλλωστε και η (σχ. 1.2.14) με την προϋπόθεση ότι: $A=A'$ και $a=a'$. Δηλ. είναι εκ ταυτότητος ίδιες οπότε:

$$\omega'=\omega\frac{1-\upsilon/c}{\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}} \quad \text{ή} \quad \omega'=\omega\sqrt{\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}} \qquad (1.2.17)$$

Και επειδή $\omega=2\pi\nu$ η (σχ. 1.2.17) παίρνει τη μορφή:

$$\nu'=\nu\sqrt{\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}} \qquad (1.2.18)$$

Πρόκειται δηλ. για τη συχνότητα του εκπεμπόμενου από την πηγή Η/Μ κύματος που βρίσκεται στο 'ακίνητο' σ.σ. $Oxyz$, την οποία καταγράφει ο παρατηρητής στο 'κινούμενο' με ταχύτητα υ σ.σ. $O'x'y'z'$. Και επειδή η ταχύτητα υ στις (σχ. 1.2.17,18) είναι αλγεβρική ποσότητα, όταν ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή θα είναι $\upsilon>0$. Οπότε από τη (σχ. 1.2.18) $\nu'<\nu$ που σημαίνει με βάση τη σχέση $\upsilon=\lambda\nu$ ότι $\lambda'>\lambda$. Δηλ. κατά την απομάκρυνση του παρατηρητή από την πηγή η οποία π.χ. εκπέμπει μονοχρωματικό φως μ.κ. λ (ορατό τμήμα της Η/Μ ακτινοβολίας), θα βλέπει φως μεγαλυτέρου μ.κ. Είναι το φαινόμενο που ονομάζουμε μετατόπιση προς το ερυθρό*. Αν όμως ο παρατηρητής πλησιάζει την πηγή τότε

* Allen R. Sandage: 'The Red-Shift'. Scientific American p. 171. Sept. 1956.

$\nu' > \nu$ και κατ' ακολουθία $\lambda' < \lambda$. Τότε θα έχουμε μετατόπιση της εκπεμπόμενης από την πηγή ακτινοβολίας προς την ιώδη περιοχή του φάσματος.

Η διωνυμική προσέγγιση της (σχ. 1.2.18) γίνεται με βάση τη γνωστή ανάλυση: $(1+x)^n \simeq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+.....$ όπου στην περίπτωση μας: $x=\upsilon/c$. Τότε θα έχουμε: $(1-x)^{1/2} \simeq 1-(x/2)-(x^2/8)$ και $(1+x)^{-1/2} \simeq 1-(x/2)-(3x^2/8)$. Και κρατώντας σαν σημαντικούς τους δύο πρώτους όρους των δύο τελευταίων σχέσεων βρίσκουμε:

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}} \simeq \nu\left(1-\frac{1}{2}\frac{\upsilon}{c}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{\upsilon}{c}\right) = \nu\left(1-\frac{\upsilon}{c}+\frac{1}{4}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \qquad (1.2.19)$$

Και η τελευταία αντιπροσωπεύει τη σχετικιστική έκφραση του επιμήκους (ακτινικού) Η/Μ φαινομένου Doppler.

Για την περίπτωση βέβαια που ισχύει: $\upsilon \ll c$ τότε η (σχ. 1.2.19) γίνεται:

$$\nu' = \nu\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right) \qquad (1.2.20)$$

ή επειδή $\nu'-\nu = -\nu\frac{\upsilon}{c}$:

$$\Delta\nu/\nu = -\upsilon/c \qquad (1.2.21)$$

όπου $\Delta\nu = \nu'-\nu$. Και με βάση τη γνωστή εξίσωση της κυματικής: $c=\lambda\nu$ από την οποία βρίσκουμε: $\Delta\nu = -(\Delta\lambda/\lambda^2)$ η (σχ. 1.2.21) συναρτήσει των μηκών κύματος γράφεται:

$$\Delta\lambda/\lambda = \upsilon/c \qquad (1.2.22)$$

όπου $\Delta\lambda$ η μετατόπιση του μ.κ. στην περιοχή του λ .

Το φαινόμενο Doppler για ακτινοβολίες στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος βρίσκει πολλές εφαρμογές ιδίως στην Αστρονομία. Πράγματι μπορεί να γίνουν μετρήσεις της επιμήκους (ακτινικής) ταχύτητας με την οποία κινούνται διάφορα ουράνια σώματα. Π.χ. μέσω του φαινομένου Doppler έχει επιβεβαιωθεί ότι οι γαλαξίες στο σύμπαν απομακρύνονται μεταξύ τους. Και μάλιστα όσο πιο μακριά βρίσκονται τόσο η ταχύτητα με την οποία διαφεύγουν είναι μεγαλύτερη. Και το γεγονός αυτό συνηγορεί υπέρ της θεωρίας του διαστελλόμενου σύμπαντος. Π.χ. σε ένα νεφελοειδή (γαλαξία) του αστερισμού Corona Borealis που απέχει από εμάς

13×10^7 έτη φωτός, έχουν εντοπιστεί φασματοσκοπικά γραμμές απορρόφησης του στοιχείου Ασβεστίου (Ca). Και με βάση πρότυπες πηγές από λυχνίες του στοιχείου αυτού στη γη, συγκριτικά έχει υπολογιστεί η μετατόπιση σε σχέση με ένα συγκεκριμένο μ.κ. αντίστοιχης γραμμής του γαλαξιακού φάσματος. Βρέθηκε ότι $\Delta\lambda/\lambda = 0.089$. Οπότε από τη (σχ. 1.2.22) με δεδομένο ότι $c = 3\times10^8\,\mathrm{m/s}$, συμπεραίνουμε ότι ο γαλαξίας αυτός απομακρύνεται από τη γη (η μετατόπιση των γραμμών γίνεται προς το ερυθρό) με ταχύτητα $\upsilon \simeq 26800\,\mathrm{km/s}$.

Το πείραμα των H.E. Ives και G.R. Stilwell.
(Επιβεβαίωση της ισχύος του σχετικιστικού
επιμήκους φαινομένου Doppler για τις Η/Μ ακτινοβολίες)

Το πείραμα αυτό* εκτελέστηκε το 1938 με τη βοήθεια υψηλής ταχύτητας διεγερμένων ατόμων Υδρογόνου. Απέδειξε ότι τελικά ισχύει η (σχ. 1.1.19): $\nu' = \nu\left(1-\frac{\upsilon}{c}+\frac{1}{4}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)$, η οποία είναι απόρροια σχετικιστικών υποθέσεων, έναντι της σχέσης:

$$\nu' = \nu\left(1-\frac{\upsilon}{c}+\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \tag{1.2.23}$$

η οποία μπορεί να εφαρμοστεί για το ίδιο ακριβώς φαινόμενο αλλά στηρίζεται σε κλασσικές υποθέσεις.

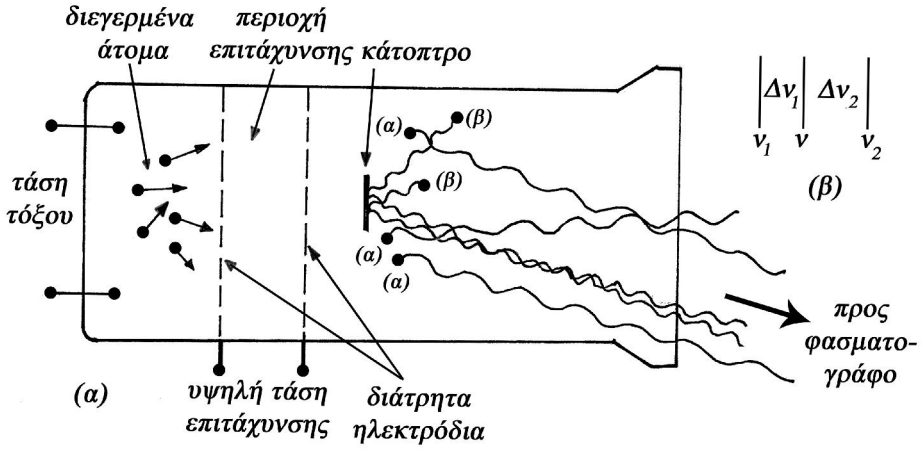
Η (σχ. 1.2.23) προκύπτει από τη γνωστή σχέση που σχετίζεται με το φαινόμενο Doppler για τα ηχητικά κύματα (βλ. Κεφ.1: Κύματα, (ΠΑΡ/ΜΑ 2) (σχ. 2.22)): $\nu' = \nu\left(\frac{\upsilon}{\upsilon+\upsilon_S}\right)$. Αφορά τη συχνότητα ν' που αντιλαμβάνεται ο ακίνητος παρατηρητής όταν η ηχητική πηγή απομακρύνεται από αυτόν με ταχύτητα υ_S. υ είναι η ταχύτητα των ηχητικών κυμάτων. Η παραπάνω σχέση μετατρεπόμενη στην: $\nu' = \nu\left(\frac{1}{1+\upsilon_S/\upsilon}\right)$ και προσεγγιζόμενη διωνυμικά: $1/(1+x) = (1+x)^{-1} \simeq 1-x+x^2$ όπου: $x = \upsilon_S/\upsilon$ γίνεται: $\nu' = \nu\left(1-\frac{\upsilon_S}{\upsilon}+\frac{\upsilon_S^2}{\upsilon^2}\right)$. Αν τελικά αντικαταστήσουμε την ταχύτητα του ήχου υ με αυτή της ταχύτητας του φωτός $(\upsilon \to c)$ τότε παίρνουμε τη (σχ. 1.2.23). Χρειαζόμαστε τελικά με βάση πειραματικά δεδομένα να δούμε ποια από

* Allen R. Sandage: 'Scientific American' Sept. 1956 (p. 171).

τις (σχ. 1.2.19,23) ισχύει για την περίπτωση του φαινόμενου Doppler στα Η/Μ κύματα.

Οι Ives και Stilwell χρησιμοποίησαν σαν πειραματική διάταξη ένα είδος καθοδικού σωλήνα, ο οποίος περιείχε Υδρογόνο (Σχ. 1.2.3). Το αριστερό τμήμα του σωλήνα ήταν διαμορφωμένο με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μπορεί να δημιουργηθεί εκκένωση (τόξο Υδρογόνου). Και κατά τη λειτουργία του παρήγαγε διεγερμένα άτομα Υδρογόνου. Πολλά από αυτά περνούσαν στη δεύτερη περιοχή του σωλήνα που περιλάμβανε δύο διάτρητα ηλεκτρόδια, από τα ανοίγματα των οποίων μπορούσαν να περάσουν τα διεγερμένα άτομα. Μεταξύ όμως αυτών των ηλεκτροδίων, επικρατούσε υψηλή διαφορά δυναμικού (π.χ. 30kV). Δηλ. ο χώρος αποτελούσε περιοχή επιτάχυνσης των διεγερμένων ατόμων και μάλιστα πολύ μεγάλης. Τα δε ανοίγματα από το δεύτερο ηλεκτρόδιο επέτρεπαν πλέον διεγερμένα άτομα να διαφεύγουν με υψηλές όμως πλέον ταχύτητες (π.χ. της τάξης των 10^6 m/s).

Ακριβώς μετά το δεύτερο ηλεκτρόδιο ήταν τοποθετημένο ένα μικρών διαστάσεων επίπεδο κάτοπτρο, με την κατοπτρική του επιφάνεια στραμμένη προς τα δεξιά. Τότε η προκύπτουσα ακτινοβολία κατά την αποδιέγερση των ατόμων του Υδρογόνου στην περιοχή μετά το κάτοπτρο μπορεί να διαδοθεί προς τη διαφα-



(Σχ. 1.2.3)

νή έξοδο του καθοδικού σωλήνα με δύο τρόπους: 1) Είτε κατ' ευθεία προς την έξοδο (άτομα (α) στο σχήμα). 2) Είτε κατόπιν ανάκλασης στο κάτοπτρο και διάδοσής τους μετά προς την έξοδο (άτομα (β) στο σχήμα). Και σύμφωνα με το φαινόμενο Doppler οι διαταραχές αυτές αναμενόταν να έχουν διαφορετικές συχνότητες ν_1, ν_2. Η ανίχνευσή τους έγινε στην έξοδο του καθοδικού σωλήνα με τη βοήθεια φασματογράφου μεγάλης διακριτικής ικανότητας. Ο ίδιος είχε και τη δυνατότητα να προσλαμβάνει και ακτινοβολία από μια κλασσική πηγή εκπομπής Υδρογόνου

συχνότητας ν. Η συχνότητα βέβαια ν (όπως και τις παραπλήσιές της ν_1, ν_2), αναφέρονται σε μια από τις πολλές χαρακτηριστικές γραμμές που εκπέμπει μια λυχνία Υδρογόνου.

Οι σχετικές θέσεις των φασματικών γραμμών με συχνότητες ν_1, ν_2 που οφείλονται στο Η/Μ φαινόμενο Doppler σε σχέση με τη γραμμή συχνότητας ν που οφείλεται στην εκπομπή από την 'ακίνητη' πηγή στην έξοδο του φασματογράφου θα έχουν τη διάταξη που φαίνεται στο (Σχ. 1.2.3β). Οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι: $\Delta\nu_1, \Delta\nu_2$ οι οποίες μεταβάλλονται ανάλογα με τη διαφορά δυναμικού που επιταχύνει τα διεγερμένα άτομα Υδρογόνου και τους προσδίνει τις τελικές τους ταχύτητες. Το μέγεθος που μετρείται στο πείραμα των Ives και Stilwell είναι το $\Delta\nu/\nu$ όπου:

$$\Delta\nu/\nu = \left(\Delta\nu_2 - \Delta\nu_1\right)/\nu \qquad (1.2.24)$$

Εφόσον για κάθε ταχύτητα των κινούμενων διεγερμένων ατόμων γνωρίζουμε τις ν_1, ν_2 και η ν είναι επίσης γνωστή, μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $\Delta\nu/\nu$: Αφ' ενός μεν με τη βοήθεια της σχετικιστικής σχέσης που δίνεται από τη (σχ. 1.2.19) και αφ' ετέρου της κλασσικής (σχ. 1.2.23). Κατόπιν μπορούμε να τις συγκρίνουμε με τις μετρούμενες τιμές που προκύπτουν από το πείραμα. Τα προαναφερόμενα καταγράφονται στον (Πίν. 1.2.4).

Ταχύτητα διεγερμένων ατόμων Υδρογόνου $\times 10^6$ m/s	0.865	1.01	1.15	1.33
Θεωρητική τιμή $\Delta\nu/\nu$ (Κλασσική)	1.67	2.26	2.90	3.91
Θεωρητική τιμή $\Delta\nu/\nu$ (Σχετικιστική)	0.835	1.13	1.45	1.97
Πειραματικές τιμές του $\Delta\nu/\nu$	0.762	1.10	1.42	1.90

(Πίν. 1.2.4)

Η ανάγνωση των αποτελεσμάτων, αποδεικνύει με αναντίρρητο τρόπο την ισχύ της σχετικιστικής (σχ. 1.2.19). Και παρά το ότι οι Ives και Stilwell έδωσαν μία προσω-

πική ερμηνεία στα πειραματικά τους αποτελέσματα, εντούτοις εκ των υστέρων τα συγκεκριμένα, αποτέλεσαν μια ακόμα επιβεβαίωση της ισχύος της (ΕΘΣ).

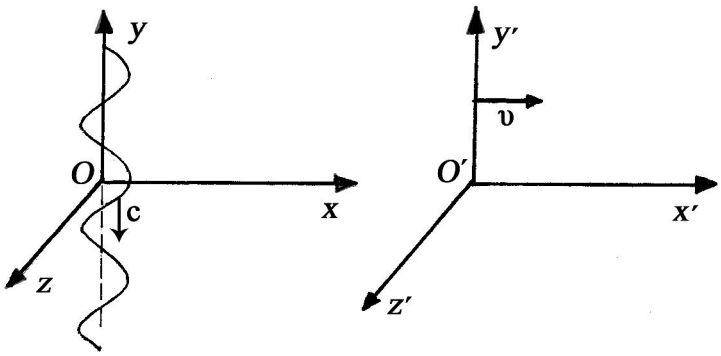
Το εγκάρσιο φαινόμενο Doppler στα Η/Μ κύματα

Θα θεωρήσουμε τα παράλληλα μεταξύ τους σ.σ. $Oxyz$ και $O'x'y'z'$. Το δεύτερο κινείται ως προς το πρώτο με ταχύτητα υ κατά τη διεύθυνση Ox' (Σχ. 1.2.5). Παράλληλα με τον άξονα y και προς τ' αρνητικά του, διαδίδεται ένα επίπεδο μετ. κύματος το οποίο κατά τα γνωστά μπορούμε να το περιγράψουμε στο σ.σ. $Oxyz$ από τη γνωστή σχέση: $E(y,t) = A\cos(\omega t + ky + a)$. Η τελευταία με την προϋπόθεση ότι το πλάτος A είναι μοναδιαίο και η φάση a μηδενική γράφεται:

$$E(y,t) = \cos(\omega t + ky) \tag{1.2.25}$$

Τότε με τη βοήθεια της πρώτης ομάδας των μετασχηματισμών Lorentz (σχ. 1.2.12β,δ): $y = y'$ και $t = \gamma\left(t' + \frac{\upsilon}{c^2}x'\right)$ με $\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}$, η (σχ. 1.2.25) γράφεται για το σ.σ. $O'x'y'z'$: $E(y,t) = E(y',t') = \cos\left\{\omega\gamma\left(t' + \frac{\upsilon}{c^2}x'\right) + ky'\right\}$ και η οποία μετά τις πράξεις γίνεται:

$$E(y',t') = \cos\left\{\omega\gamma t' + \frac{\omega\upsilon\gamma}{c^2}x' + ky'\right\} \tag{1.2.26}$$



(Σχ. 1.2.5)

Είναι δε της μορφής:

$$E(y',t') = \cos\left\{\omega' t' + k'_x x' + k'_y y'\right\} \tag{1.2.27}$$

που σημαίνει ότι δεν παραβιάζει το πρώτο αξίωμα της (ΕΘΣ) επειδή έχει την ίδια μορφή με τη (σχ. 1.2.25). Είναι δηλ. ένα επίπεδο μετ. κύματος (της γενικής μορφής: $\cos(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$) το οποίο όμως για το σ.σ. $O'x'y'z'$ έχει διαφορετικά συνημίτονα κατεύθυνσης από ότι στο σ.σ. $Oxyz$.

Επομένως με σύγκριση των (σχ. 1.2.27,26) βρίσκουμε ότι την κυκλική συχνότητα την οποία αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής που βρίσκεται στο κινούμενο με ταχύτητα υ σ.σ. $O'x'y'z'$ θα είναι:

$$\omega' = \omega\gamma \quad \text{ή} \quad \nu' = \nu\gamma \quad \text{ή} \quad \nu' = \nu \Big/ \sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)} \tag{1.2.28}$$

Όσον αναφορά τη διωνυμική ανάλυση της (σχ. 1.2.28), αυτή μας δίνει:

$$\nu' = \frac{\nu}{1-\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}+\ldots} \quad \text{ή} \quad \nu = \nu'\left(1-\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}+\ldots\right) \tag{1.2.29}$$

από την οποία βρίσκουμε:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq -\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} \tag{1.2.30}$$

Η (σχ. 1.2.28) μας δίνει τον τύπο του εγκάρσιου φαινομένου Doppler, δηλ. τη μεταβολή της συχνότητας της Η/Μ ακτινοβολίας όταν η σχετική κίνηση του σ.σ. $O'x'y'z'$ γίνεται κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης της ακτινοβολίας στο σ.σ. $Oxyz$. Δηλ. $(\boldsymbol{\upsilon} \perp \mathbf{c})$. Το εγκάρσιο φαινόμενο Doppler σαν δεύτερης τάξης φαινόμενο $\left[(\Delta\nu/\nu) \sim \upsilon^2/c^2\right]$ (σχ. 1.2.30), είναι πιο δύσκολο να μετρηθεί σε σχέση με το αντίστοιχο επίμηκες $\left[(\Delta\nu/\nu) \sim \upsilon/c\right]$ (σχ. 1.2.21). Επιβεβαιώθηκε όμως πειραματικά με τη βοήθεια του φαινομένου Mossbauer για ακτίνες γ, που προέκυπταν από ραδιενεργά άτομα.

Διεύρυνση των φασματικών γραμμών εκπομπής των διαφόρων στοιχείων, λόγο της δράσης του επιμήκους φαινομένου Doppler

Γνωρίζουμε ότι κατά τη λειτουργία των φασματικών λυχνιών εκπέμπεται φως του οποίου το φάσμα είναι γραμμικό (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός, (§ 4.4.4) και (ΘΕΜΑ 3)). Τις 'γραμμές του φάσματος μπορούμε να τις παρατηρήσουμε μέσω ενός φασματοσκοπίου (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός, (§ 4.4.2)

(Εικ. 4.4.2.2)) και να τις καταγράψουμε μέσω ενός φασματογράφου (βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός, (§ 7.6.5.3)). Η κατανομή της καθεμιάς των γραμμών είναι γκαουσιανής μορφής και το φως από απόψεως χρονικής συμφωνίας είναι κατά τα γνωστά (§ 6.1.2) ψευδομονοχρωματικό. Οι λυχνίες αυτές περιέχουν διαφόρων ειδών αέρια, υγρά ή στερεά. Που κατά τη λειτουργία τους (κάτω από συνθήκες συνήθως υψηλής τάσης), τα στοιχεία τους βρίσκονται σε αέρια μορφή (τα στερεά κατόπιν εξάχνωσης). Επομένως στο εσωτερικό των λυχνιών βρίσκονται διεγερμένα άτομα ή μόρια που εκπέμπουν ακτινοβολίες, βρισκόμενα σε θερμική κίνηση. Όμως η κίνηση αυτού του είδους είναι χαοτική υπακούοντας κατά προσέγγιση στη στατιστική Maxwell - Boltzmann. Και οι κινήσεις τους σε σχέση με τον φασματογράφο, που δέχεται προς ανάλυση την εκπεμπόμενη από αυτά ακτινοβολία, περιλαμβάνουν όλες τις πιθανές τιμές ταχυτήτων. Άρα το όργανο λόγω του επιμήκους φαινομένου Doppler, θ' αναλύει συχνότητες από $\nu_1 = \nu_0\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)$ έως $\nu_2 = \nu_0\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)$. Όπου ν_0 η κεντρική συχνότητα εκπομπής ενός ατόμου και $\upsilon \equiv \upsilon_{mp}$ η λεγόμενη ***πλέον πιθανή (most probable)*** ταχύτητα. Η πλέον πιθανή ταχύτητα, είναι ένα είδος 'μέσης' ταχύτητας που δίνεται από τη σχέση: $\upsilon_{mp} = \sqrt{2kT/m}$. Όπου k η σταθερή του Boltzmann και T η θερμοκρασία του αερίου σε απόλυτους βαθμούς και m η μοριακή μάζα. Υπολογίζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Maxwell - Boltzmann στα πλαίσια της μοριακής φυσικής. Τότε:

$$\nu_2 - \nu_1 = \Delta\nu = 2\nu_0\left(\upsilon/c\right) \qquad (1.2.31)$$

Η ποσότητα $\Delta\nu$ ονομάζεται εύρος της φασματικής γραμμής, που οφείλεται στο επίμηκες Η/Μ φαινόμενο Doppler (σχετική κίνηση της εκπέμπουσας πηγής όσον αφορά τον παρατηρητή. Εδώ τον φασματογράφο).

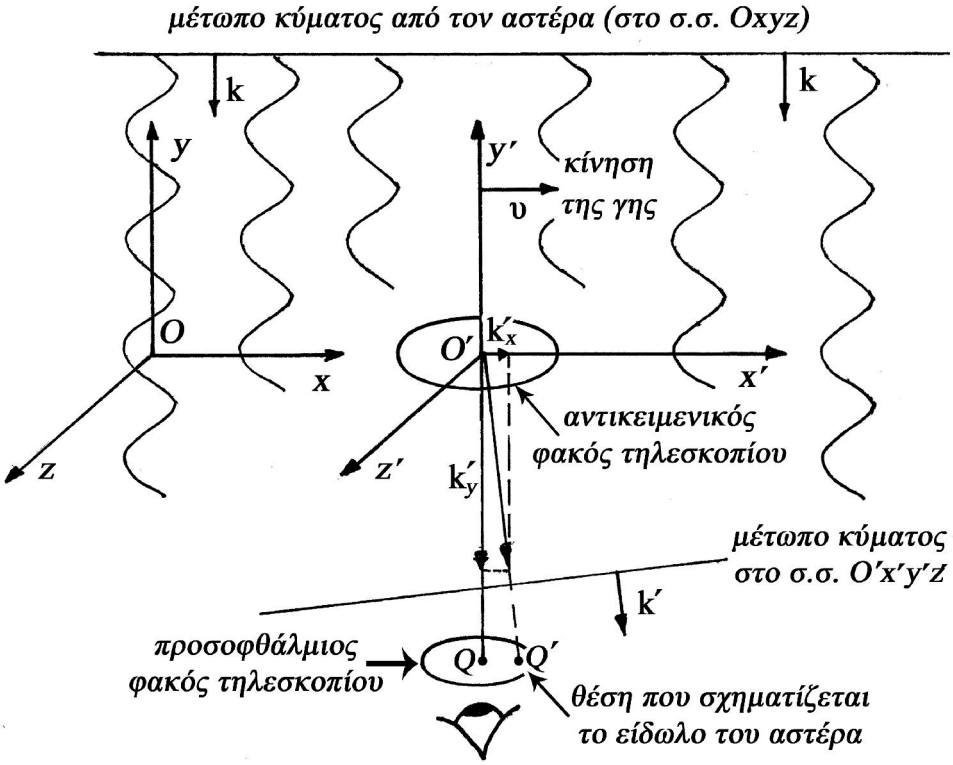
Το μέγεθος της διεύρυνσης κατά Doppler (εκτός του φυσικού εύρους εκάστης φασματικής γραμμής (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός, ΘΕΜΑ 3)) μπορεί ν' αποτιμήσει την ταχύτητα υ_{mp} των ατόμων ή των μορίων και με βάση τη (σχ. 1.2.31) την απόλυτη θερμοκρασία T του αερίου που φωτοβολεί.

Η σχετικιστική ερμηνεία του 'αστρικού σφάλματος'.
(Των παρατηρήσεων του Bradley του έτους 1727)

Οι παρατηρήσεις του Άγγλου αστρονόμου J.Bradley οι οποίες οδήγησαν στην ανάδειξη του λεγόμενου 'αστρικού σφάλματος', περιγράφονται αναλυτικά στην εισαγωγή του βιβλίου. Έγιναν μέσω ενός τηλεσκοπίου το οποίο βρίσκεται στη γη και το οποίο ακολουθεί την κίνησή της περί τον ήλιο. Όπου ένας παρατηρητής,

σκοπεύοντας ένα αστέρα (στο κέντρο του προσοφθάλμιου), αυτό το οποίο βλέπει δεν είναι η πραγματική αλλά η φαινόμενη θέση του στο ουράνιο στερέωμα. Βέβαια η γωνιακή διαφορά (μεταξύ πραγματικής και φαινόμενης θέσης του αστέρα) όπως μετρήθηκε από τον ίδιο τον Bradley,είναι λίγο μεγαλύτερη των $20''$ της μοίρας και δίνεται από τη σχέση: $\tan a = \upsilon / c$. Όπου $\upsilon \simeq 30\,\mathrm{km/s}$ η ταχύτητα περιστροφής της γης περί τον ήλιο και c η ταχύτητα του φωτός, την οποία και υπολόγισε αριθμητικά. (βλ. Κεφ. 2: Ηλεκτρομαγνητικά κύματα, (ΠΑΡ/ΜΑ 1)).

Από την άποψη της (ΕΘΣ) το προαναφερόμενο πρόβλημα τίθεται ως εξής: Θεωρούμε κατ' αρχή ότι στον αστέρα επισυνάπτεται το σ.σ. $Oxyz$ (Σχ. 1.2.6) και ότι το φως το οποίο φθάνει στη γη από αυτόν (το οποίο λόγω της μεγάλης απόστασης του είναι επίπεδο μετ. κύματος), διαδίδεται κατά τα αρνητικά του άξονα των



(Σχ. 1.2.6)

Oy. Ένα δεύτερο σ.σ. $O'x'y'z'$ επισυνάπτεται στη γη (όπου βρίσκονται παρατηρητής και τηλεσκόπιο) και κινείται με μια ταχύτητα υ που η διεύθυνσή της είναι κατά τον άξονα Ox'. Οι άξονες Ox, Ox' είναι παράλληλοι. Αυτή είναι η σχετική κίνηση μεταξύ των δύο σ.σ. που μεταξύ τους είναι παράλληλα. Επομένως η επίλυση του προβλήματος όσον αφορά τον προσδιορισμό των διευθύνσεων του διαδιδόμενου Η/Μ

κύματος στα δύο σ.σ. $Oxyz$ και $O'x'y'z'$, είναι πανομοιότυπο με αυτό το οποίο αντιμετωπίσαμε κατά τον υπολογισμό του εγκάρσιου Η/Μ φαινόμενου Doppler.

Άρα το διαδιδόμενο Η/Μ κύμα που βλέπει ο παρατηρητής που βρίσκεται στο σ.σ. $O'x'y'z'$, θα δίνεται από τις (σχ. 1.2.26,27). Δηλ. όπως θα δούμε στα επόμενα, δεν θα έχει πλέον τη διεύθυνση του διαδιδόμενου μετ. κύματος $\mathbf{k}$ στο σ.σ. $Oxyz$. Πράγματι οι συνιστώσες του κυματοδιανύσματος $\mathbf{k}'$ (στο σ.σ. $O'x'y'z'$) θα είναι οι k'_x, k'_y $\left(k'_z = 0\right)$ και βρίσκονται με σύγκριση μεταξύ των (σχ. 1.2.26,27). Κατόπιν τούτου θα έχουμε:

$$k'_x = \frac{\omega \upsilon \gamma}{c^2}, \qquad k'_y = k \tag{1.2.33}$$

όπου: $\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}$ και $k = \omega/c$. Όσον αφορά τη γωνία a μεταξύ των διευθύνσεων του $\mathbf{k}$ (διεύθυνση πραγματικής θέσης του αστέρα) και του $\mathbf{k}'$ (διεύθυνση φαινόμενης θέσης του) θα δίνεται από τη σχέση: $\tan a = k'_x/k'_y$ (Σχ. 1.2.6). Και μετά την αντικατάσταση των k'_x, k'_y από τις (σχ. 1.2.33) βρίσκουμε τελικά:

$$\tan a = \frac{\upsilon}{c}\gamma \qquad \text{ή} \qquad \tan a = \frac{\upsilon}{c\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}} \tag{1.2.34}$$

Και με τη βοήθεια της διωνυμικής ανάλυσης του παράγοντα γ θα έχουμε: $\gamma = \left[1\Big/\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}\right] \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \ldots$ οπότε η (σχ. 1.2.34) γίνεται:

$$\tan a = \frac{\upsilon}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \tag{1.2.35}$$

Από την τελευταία σχέση είναι προφανές ότι για $\upsilon \simeq 3\times10^4$ m/s και $c = 3\times10^8$ m/s ο δεύτερος όρος της (σχ. 1.2.35) είναι αμελητέος. Επομένως τελικά:

$$\tan a = \frac{\upsilon}{c} \tag{1.2.36}$$

που είναι η σχέση που ανέδειξε ο Bradley.

Έστω λοιπόν ο μηχανικός άξονας του τηλεσκοπίου προσανατολίζεται να σκοπεύει ένα αστέρα που βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση στον ουράνιο θόλο (Σχ.

1.2.6). Τότε βλέποντας μέσω του τηλεσκοπίου, το είδωλο του αστέρα δεν θα κατέχει το κέντρο στο πεδίο του προσοφθάλμιου φακού του. Και για να το φέρουμε στο κέντρο του θα πρέπει να περιστρέψουμε τον άξονά του τηλεσκόπιου κατά γωνία a αριστερόστροφα. Τότε η θέση του αστέρα που βλέπουμε να κατέχει το κέντρο του σταυρονήματος του προσοφθάλμιου, είναι η φαινόμενη.

1.3 *Πειραματική μέτρηση της ταχύτητας των διεγερμένων ατόμων υδρογόνου, κατά την κίνησή τους σε χρωμοσφαιρικό εκρηκτικό νήμα της χρωμόσφαιρας του ηλίου, με τη βοήθεια του επιμήκους φαινόμενου Doppler*

Χρωμόσφαιρα του ηλίου και χρωμοσφαιρικά νήματα (προεξοχές)

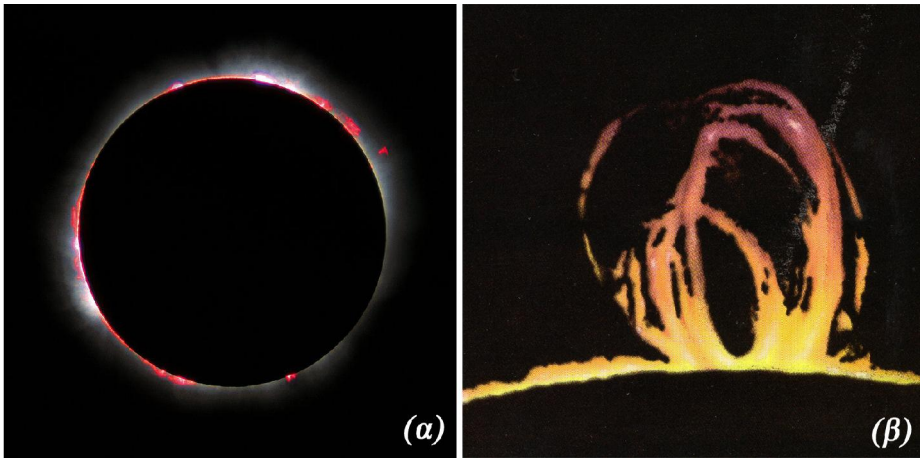
Η ***χρωμόσφαιρα (chromosphere)*** είναι μια από τις ζώνες του ηλίου που ανήκει στα ανώτερα στρωματά του, στη λεγόμενη ατμόσφαιρα. Βρίσκεται μεταξύ της ζώνης της ***φωτόσφαιρας (photosphere)*** και της λεγόμενης ***μεταβατικής ζώνης (transition zone)*** που κατά τα γνωστά είναι προπομπός της τελευταίας πλέον ευρείας ζώνης του ηλίου, του ***στέμματος (corona)***. Πρόκειται για μια λεπτή σχετικά ζώνη πλάτους $\simeq 1500\text{km}$ και γίνεται ορατή μόνο κατά τη διάρκεια των ολικών εκ-

Σημείωση

Ο ήλιος σαν αστέρας, χωρίζεται σε γενικές γραμμές στις εξής ζώνες: 1) Τον Πυρήνα του (ακτίνας $\simeq 225.500\text{km}$), 2) Τη Ζώνη Ακτινοβολίας (πλάτους $\simeq 376.060\text{km}$), 3) Τη Ζώνη Μεταφοράς (πλάτους $\simeq 97.600\text{km}$), 4) Τη Φωτόσφαιρα (πλάτους $\simeq 400\text{km}$), 5) Τη Χρωμόσφαιρα (πλάτους $\simeq 1500\text{km}$), 6) Τη Μεταβατική Ζώνη (πλάτους $\simeq 2.500\text{km}$), και 7) Το Στέμμα, το οποίο εκκινεί από το τέλος της μεταβατικής ζώνης και εκτίνεται μέχρις και πέραν των ορίων του πλανητικού μας συστήματος.

λείψεων του ηλίου. Δηλ. όταν ο δίσκος της σελήνης καλύπτει πλήρως το δίσκο του ηλίου για λίγα όμως λεπτά όσο διαρκεί το φαινόμενο. Η εμφάνισή της είναι σαν ένα κόκκινο στεφάνι που περιβάλλει τη φωτόσφαιρα (Εικ. 1.3.1α). Και το χρώμα της οφείλεται στην έντονη εκπομπή των ατόμων του Υδρογόνου (Η) (γραμμή $\text{H}_\alpha : \lambda = 6562.5$ Å καθώς και των ασθενέστερων γραμμών του $\text{H}_\beta, \text{H}_\gamma$). Η θερμοκρασία της αυξάνεται από την επιφάνεια της φωτόσφαιρας (θερμοκρασίας $T \simeq 5685^0\text{K}$) μέχρις το πέρας της, που ανέρχεται στους $10^5\ {}^0\text{K}$ ή και περισσότερο.

Η χρωμόσφαιρα περιλαμβάνει κυρίως: Η (Υδρογόνο) (γραμμές εκπομπής H_α, H_β κλπ). Ιονισμένο Ca (Ασβέστιο) (γραμμές εκπομπής Η και Κ). Ουδέτερο He (Ήλιο).



(Εικ. 1.3.1)

Και έπονται σε ένταση γραμμές εκπομπής από τα στοιχεία: Sd (Στρόντιο), Ti (Τιτάνιο), Mg (Μαγνήσιο), Na (Νάτριο) και Fe (Σίδηρος). Επίσης περιλαμβάνει πλούσια αποθέματα ελεύθερων ηλεκτρονίων και πρωτονίων εξ ου και η καλή ηλεκτρική της αγωγιμότητα.

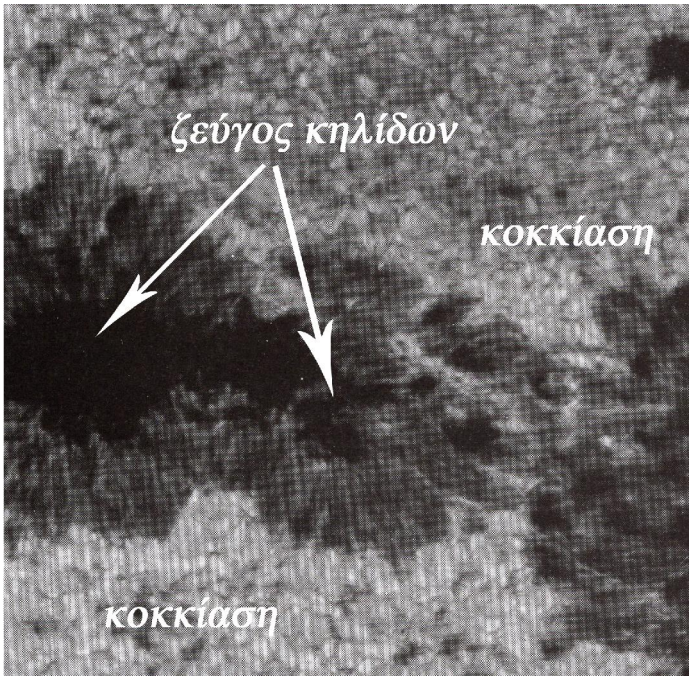
Η παρακολούθηση των φαινομένων που συμβαίνουν και εξελίσσονται στη χρωμόσφαιρα, γίνονται μέσω οργάνων (π.χ. τηλεσκόπια με ενσωματωμένους φασματογράφους ή μονοχρωματικά φίλτρα πολύ στενής φασματικής περιοχής, ακόμη και της τάξης των λίγων Å). Η κεντρική περιοχή αυτών των φίλτρων ταυτίζεται με μια από τις γραμμές εκπομπής των στοιχείων που συνθέτουν την ατμόσφαιρά της. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγεται σημαντικά το ανεπιθύμητο φως το διαχεόμενο από τη φωτόσφαιρα. Η χρωμόσφαιρα δεν είναι ομοιόμορφη, αλλά απαρτίζεται από ένα μωσαϊκό ενεργών ως επί το πλείστον σχηματισμών, το λεγόμενο ***χρωμοσφαιρικό δίκτυο***. Από τους κυριότερους είναι: 1) Οι ***Ακίδες***, 2) Οι ηλιακές ***Εκλάμψεις*** και 3) Οι ***Προεξοχές(Αψίδες)*** συμπεριλαμβανομένων των ***νημάτων***, τα οποία συγκεκριμένα μας ενδιαφέρουν και θα περιγράψουμε στοιχειωδώς.

Οι προεξοχές απαρτίζονται από νέφη σε κίνηση, διεγερμένων αερίων Η και He καθώς και λοιπών σωματιδίων, όπως είναι τα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια τα οποία ήδη αναφέραμε. Η όψη των προεξοχών, παρατηρούμενων στο χείλος του ηλίου, μέσα στη χρωμόσφαιρα έως και την περιοχή του στέμματος καθ' ύψος, έχουν την εμφάνιση συστάδων πολύκλωνων δένδρων, βουνών ή βρόγχων (Εικ. 1.3.1β) τεραστίων διαστάσεων. Πρόκειται κατά γενική ομολογία για τα πιο εντυπωσιακά φαινόμενα που παρατηρούνται στην ατμόσφαιρα του ηλίου. Για τις περιπτώσεις όμως που η παρατήρησή τους γίνεται στο εσωτερικό του ηλιακού δίσκου, έχουν

την όψη σκοτεινών (σε σχέση με τη λαμπρότητα της επιφάνειάς του) νηματοειδών σχηματισμών, εξ ου και η ονομασία τους ***χρωμοσφαιρικά νήματα***. Οι πιο αξιόλογες προεξοχές ξεκινούν να εμφανίζονται ένα με δύο έτη μετά το ελάχιστο της δραστηριότητας του (ενδεκαετούς) ηλιακού κύκλου και ακολουθούν την πορεία της δράσης των κηλίδων στα ίδια ηλιακά πλάτη. Το γεγονός αυτό συνδέει άμεσα τα νήματα τις περισσότερες φορές με τα μαγνητικά πεδία των κηλίδων.

Σημείωση

Οι ***ηλιακές κηλίδες (sun spots)*** αποτελούν ένα από τους σπουδαιότερους σχηματισμούς της φωτόσφαιρας του ηλίου μαζί με τη λεγόμενη κοκκίαση της επιφάνειάς της. Στην (Εικ. 1.3.2) μπορούμε να δούμε ένα ζεύγος κηλίδων καθώς και την κοκκίαση. Έχουν την όψη εκτεταμένων σκοτεινών περιοχών και είναι ευδιάκριτες από τη γη με απλό τηλεσκόπιο ή ακόμη και με γυμνό μάτι τις απογευματινές

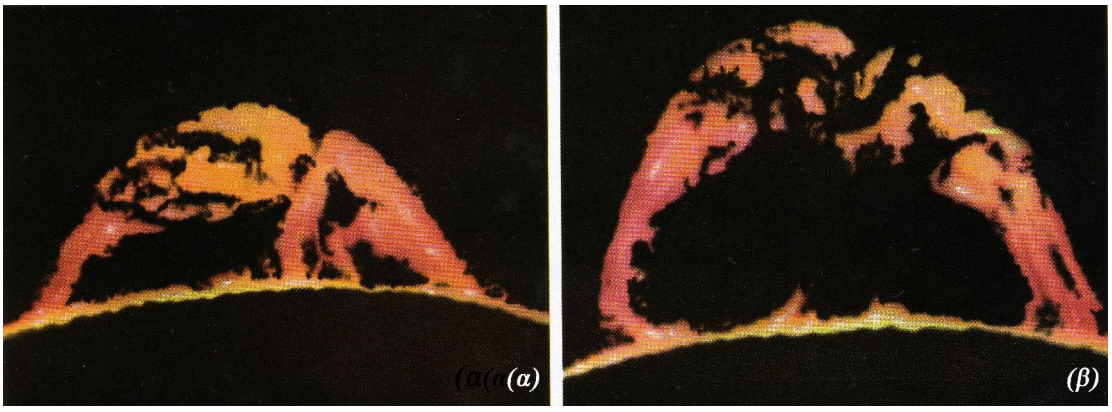


(Εικ. 1.3.2)

ώρες. Η διάμετρός τους πολλές φορές υπερβαίνει τα 10^5 Km και συνήθως εμφανίζονται κατά ζεύγη. Η δομή τους είναι κοίλη με βάθος ακόμα και 800Km. Η σκοτεινότητα τους οφείλεται στη χαμηλότερη θερμοκρασία σε σχέση με το περιβάλλον τους. Έχει αποδειχθεί (μέσω του φαινομένου Zeeman) ότι οι κηλίδες παρουσιάζουν έντονο μαγνητικό πεδίο ανά ζεύγη. Δηλ. εμφανίζουν διπολικότητα βορείου και νοτίου μαγνητικών πόλων.

Η ύπαρξη των κηλίδων και η μαγνητική τους συμπεριφορά, σχετίζεται – όπως έχει προταθεί – και δεν θ' αναλυθεί εδώ, με δύο ισχυρούς παράγοντες. Ο πρώτος αφορά τη διαφορική περιστροφή του ήλιου λόγω της αεριώδους του μορφής (δηλ. της μεγαλύτερης ταχύτητας περιστροφής της μάζας των αερίων στον ισημερινό σε σχέση με αυτή στους πόλους). Το τελευταίο θα έχει σαν αποτέλεσμα οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου του ηλίου να παρασύρονται και να στρεβλώνονται, δημιουργώντας τους μαγνητικούς πόλους των κηλίδων. Ο δεύτερος αφορά τις διαχεόμενες προς το εξωτερικό της ζώνης μεταφοράς μάζες ιονισμένων αερίων.

Βασικοί τύποι προεξοχών (που όπως ήδη αναφέραμε, στο εσωτερικό του ηλιακού δίσκου αντιπροσωπεύουν τα νήματα), είναι οι λεγόμενες ***ήρεμες*** και οι ***κινούμενες***. Μας ενδιαφέρουν ως επί το πλείστον οι κινούμενες, τις οποίες και θα περιγράψουμε στοιχειωδώς. Και από τις αρκετών ειδών κινούμενες προεξοχές μας ενδιαφέρουν εδώ οι ***εκρηκτικές***. Πρόκειται για σχηματισμούς που οφείλονται στη βίαιη μετατόπιση τυχαία κινούμενων μαζών διεγερμένων ατόμων υδρογόνου, συνήθως μεταξύ των συζυγών κηλίδων και η διαμόρφωσή τους εξαρτάται από το δυναμικό μαγνητικό πεδίο τους. Είναι βραχύβιοι σχηματισμοί διάρκειας λίγων ωρών ή λεπτών. Στην (Εικ. 1.3.3) φαίνεται η εξέλιξη μιας προεξοχής στο χείλος του ηλίου που το ύψος της εκτιμήθηκε στα $1.6\times10^5\,\mathrm{km}$. Μια τέτοιου είδους εκρηκτική προεξοχή στο εσωτερικό του δίσκου του ηλίου θα συνιστούσε ένα αντίστοιχο εκρηκ-



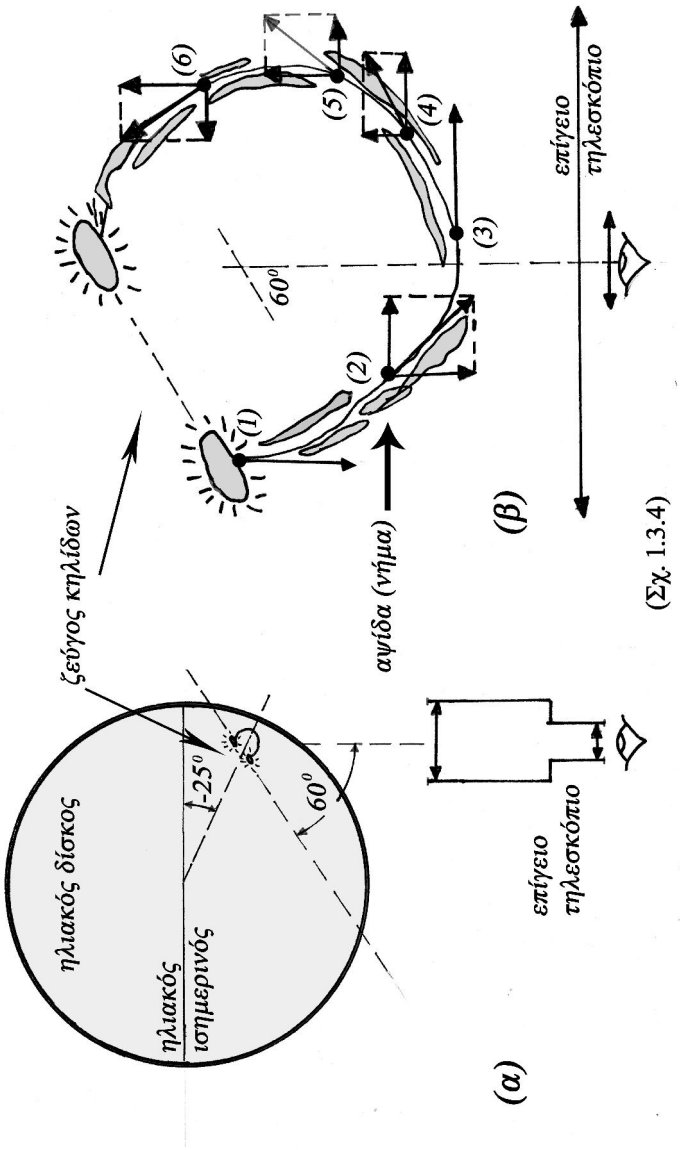
(Εικ. 1.3.3)

τικό νήμα. Και εδώ θα πρέπει να ειπωθεί ότι η ταχύτατη κίνηση διεγερμένων ατόμων υδρογόνου ή και άλλων στοιχείων, σε τροχιές κατά μήκος των μαγνητικών δυναμικών γραμμών μεταξύ των κηλίδων, μπορεί να προκαλέσει μετρήσιμο Η/Μ φαινόμενο Doppler, το οποίο οδηγεί στον προσδιορισμό της ταχύτητας μετακίνησης των μαζών του.

Α. ΒΟΥΛΓΑΡΗ: Ερευνητή

Πειραματικές μετρήσεις μέσω του επιμήκους φαινομένου Doppler, σε ταχύτατα εξελισσόμενο εκρηκτικό ηλιακό χρωμοσφαιρικό νήμα

Το πρωινό της 26-7-2004, από προσωπικό παρατηρητήριο στην πόλη της Κέρκυρας, με τη βοήθεια τηλεσκοπίου που διέθετε μονοχρωματικό φίλτρο Lyot* φασματικού εύρους $\Delta\lambda = 0.8\,\text{Å}$ για τη γραμμή του Υδρογόνου $H_\alpha : \lambda = 6562.5\,\text{Å}$, γινόταν επόπτευση ενός δραστήριου συστήματος ομάδας κηλίδων και συγκεκριμένα ενός ζεύγους σε ηλιακό πλάτος: $\simeq -25^0$ (Σχ. 1.3.4α).

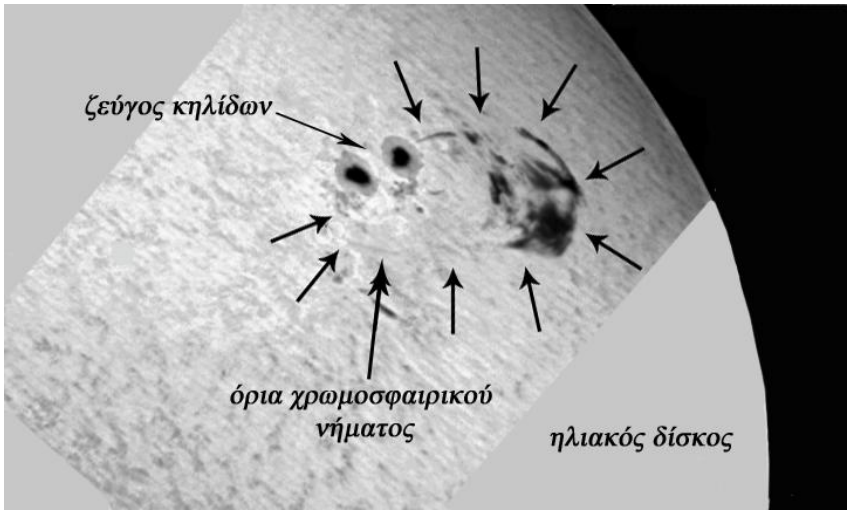


(Σχ. 1.3.4)

* Ε.Δ. Βανίδη, 'Εργαστηριακή Οπτική [4]: 'Πόλωση του Φωτός στο Κενό και την Ύλη' (§ 8.1).

Κατά τη διάρκεια της παρατήρησης της περιοχής των δύο κηλίδων (σε μια βέβαια αυστηρά μονοχρωματική περιοχή του ορατού φάσματος που μας επέτρεπε το χρησιμοποιούμενο φίλτρο), αλλάζαμε συνεχώς το συντονισμό του (προκειμένου να έχουμε καθαρή απεικόνιση του ειδώλου λόγω της συνεχούς κίνησης των μαζών του υδρογόνου). Και αυτό γινόταν με τη βοήθεια περιστρεφόμενου βερνιέρου που διέθετε το όργανο. Με τον τρόπο αυτό, έγινε η λήψη έξη τον αριθμό φωτογραφικών στιγμιότυπων σε διάρκεια $17\,\min$. Η κατοπινή επεξεργασία - σύνθεση αυτών των εικόνων μέσω υπολογιστή, ανέδειξε την ύπαρξη αψιδωτού χρωμοσφαιρικού νήματος (Εικ. 1.3.5) του οποίου η αρχή και το τέλος οριοθετούνταν από τις δύο κηλίδες.

Η διεύθυνση του νήματος σε σχέση με τη διεύθυνση παρατήρησής του, σχημάτιζε γωνία περίπου 60^0 (Σχ. 1.3.4α). Στο (Σχ. 1.3.4β) (μεγέθυνση της περιοχής των κηλίδων) μπορούμε να δούμε κατά προσέγγιση τις έξι θέσεις: $(1) \rightarrow (6)$ συντονισμού του φίλτρου Lyot. Στις θέσεις $(1),(2)$ υφίσταται ακτινική συνιστώσα της κίνησης των διεγερμένων ατόμων του Υδρογόνου προς την κατεύθυνση του παρατηρητή. Στη θέση (3) δεν υφίσταται, επειδή η κίνηση γίνεται κάθετα προς τη διεύθυνση παρατήρησης. Ενώ στις θέσεις $(4),(5),(6)$ η κίνηση γίνεται αντίθετα προς



(Εικ. 1.3.5)

τον παρατηρητή (οι μάζες του υδρογόνου απομακρύνονται από αυτόν). Θα πρέπει να ειπωθεί βέβαια ότι στο (Σχ. 1.3.4β) για εποπτικούς λόγους, η 'σχεδίαση των κινουμένων μαζών' του υδρογόνου του νήματος, έγινε σχεδόν στην επιφάνεια του ηλίου. Παρά το ότι το επίπεδο του σχηματισμού τους εμφανίζει αρκετά μεγάλη κλίση ως προς αυτό.

Για τη θέση (1) μετρήσαμε (μέσω του φίλτρου Lyot), μια μετατόπιση της γραμμής H_α του υδρογόνου προς το ιώδες (πηγή που πλησιάζει τον παρατηρητή)

κατά $|\Delta\lambda| \simeq 3.5$ Å. Επίσης γνωρίζουμε ότι: $\mathrm{H}_\alpha : \lambda = 6562.5$ Å και $c = 3\times10^8$ m/s. Επομένως ήταν δυνατόν να γίνει ο υπολογισμός της επιμήκους (ακτινικής) συνιστώσας της ταχύτητας των ατόμων του υδρογόνου με τη βοήθεια του τύπου που μας δίνει η (σχ. 1.2.22) και αφορά το επίμηκες φαινόμενο Doppler:

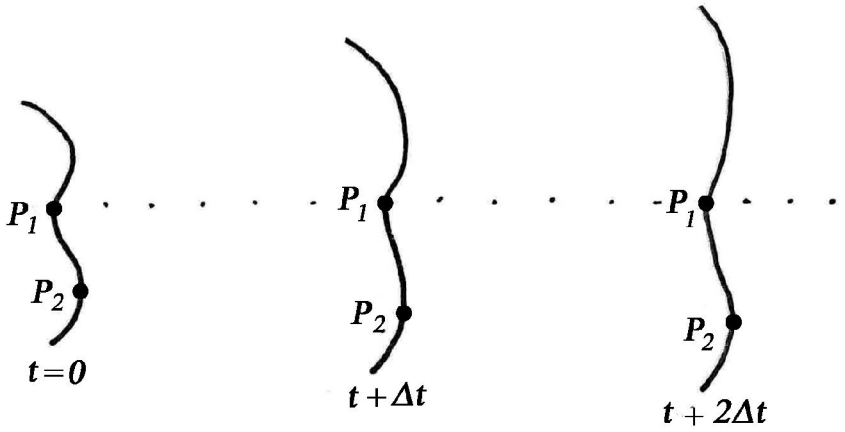
$$|\Delta\lambda|/\lambda = \upsilon_{\alpha\kappa\tau}/c \tag{1.3.1}$$

Βρέθηκε τελικά: $\upsilon_{\alpha\kappa\tau} \simeq 160\,\mathrm{km/s}$.

ΘΕΜΑ 2

Μερική χωρική συμφωνία.
Το θεώρημα των Van Cittert-Zernike

Θεωρούμε τη διάδοση στο χώρο ενός μετώπου κύματος που προέρχεται από μια πηγή συγκεκριμένης φασματικής κατανομής. Πάνω στο ίδιο μέτωπο κύματος (Σχ. 2.1) για τη χρονική στιγμή $t = 0$ ορίζουμε δύο σημεία P_1, P_2. Επειδή το μέτωπο κύματος τη στιγμή αυτή συνιστά μια ισοφασική επιφάνεια, η διαφορά φάσης των διαταραχών μεταξύ των προαναφερομένων σημείων είναι ίση με μηδέν. Αν τώρα η



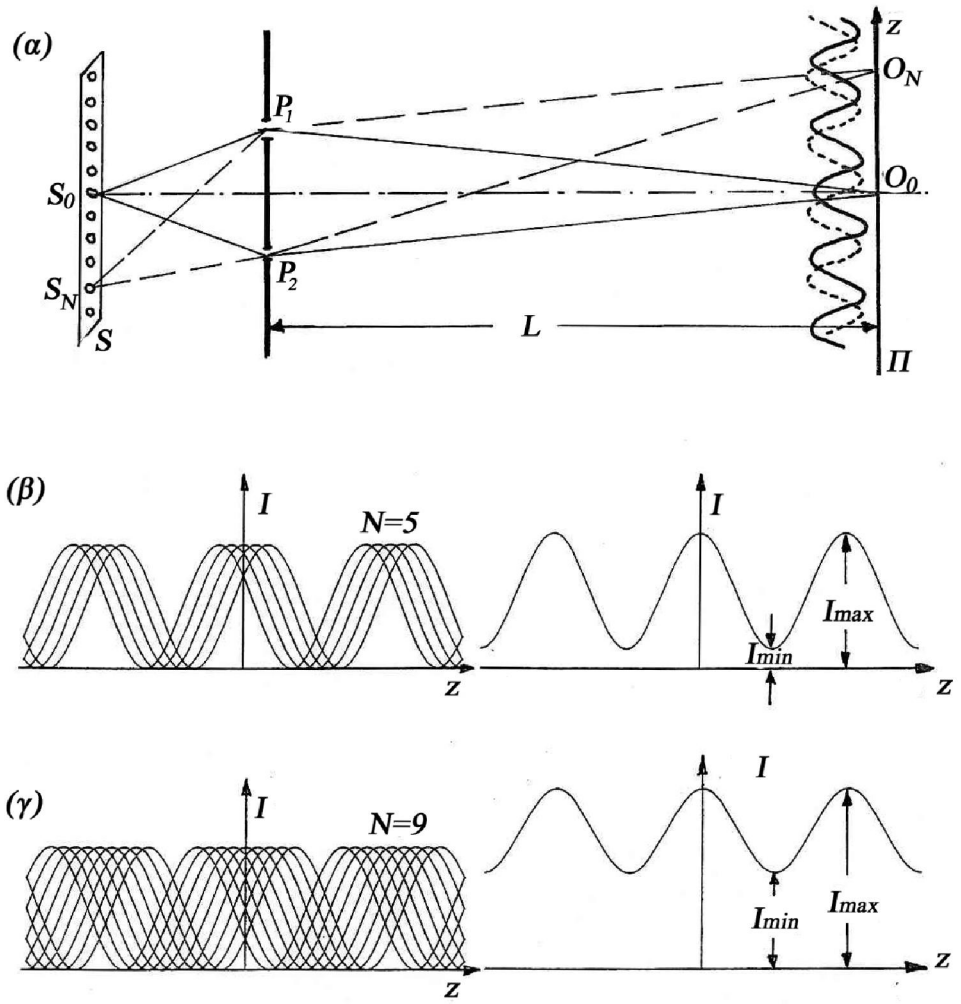
(Σχ. 2.1)

διαφορά αυτή παραμένει μηδέν για κάθε χρονική στιγμή $t > 0$, τότε θα λέμε ότι υπάρχει ***πλήρης χωρική συμφωνία*** μεταξύ των δύο σημείων (εννοούμε των διαταραχών στις θέσεις αυτές). Τελικά αν το ίδιο ακριβώς συμβαίνει για κάθε ζεύγος σημείων του μετώπου κύματος, τότε αυτό θα είναι ***χωρικά σύμφωνο***. Παράδειγμα χωρικά συμφώνου μετώπου κύματος είναι αυτό που εκπέμπεται από μεγάλης μονοχρωματικότητας σημειακή πηγή (σφαιρικό μέτ. κύματος). Η έννοια βέβαια της 'σημειακότητας' δηλ. οι διαστάσεις της πηγής, αφορά άμεσα τη χωρική συμφωνία και η σημασία που προσδίδεται σ' αυτήν περιγράφεται στα επόμενα.

Στο πείραμα του Young (§ 6.4.1) τα P_1, P_2 κατείχαν τις θέσεις δύο ανοιγμάτων πάνω σ' ένα διάφραγμα που παρεμβαλλόταν στην πορεία ενός μετώπου κύματος. Η συσχέτιση αυτών των διαταραχών σε μια απόσταση από το διάφραγμα, με βάση ορισμένες προϋποθέσεις, είχε σαν αποτέλεσμα την ανάδειξη φαινομένων συμβολής. Οι προϋποθέσεις αφορούσαν α) τη 'σημειακότητα' της πηγής (δηλ. το σχετικά μικρό της μέγεθος και β) τον υψηλό βαθμό χρονικής συμφωνίας της (δηλ. την εκπομπή από αυτήν μονοχρωματικού φωτός). Κάτω από αυτές τις συνθήκες η

διαφορά φάσης των διαταραχών στα P_1, P_2 ήταν σταθερή, για οποιαδήποτε απόσταση μεταξύ τους, με συνέπεια η φωτοαντίθεση (ευκρίνεια) των σχηματιζόμενων κροσσών συμβολής να είναι η μέγιστη δυνατή. Η σταδιακή όμως αύξηση των διαστάσεων της πηγής θα έχει σαν αποτέλεσμα την αντίστοιχη ελάττωση της ευκρίνειας των κροσσών μέχρις ακόμα και τον μηδενισμό της. Είναι λοιπόν το μέγεθος της φωτίζουσας πηγής που παίζει ένα σοβαρό ρόλο στη δυνατότητα συσχετισμού των διαταραχών, που προέρχονται από δύο σημεία του προκύπτοντος από αυτήν μετώπου κύματος. Από εκεί και ο όρος ***χωρική συμφωνία (spatial coherence)***.

Η μεταβολή της ευκρίνειας των κροσσών συμβολής στο πείραμα του Young, είναι δυνατόν ν' αναδειχθεί σχετικά εύκολα αν θεωρήσουμε ότι η φωτίζουσα πηγή (Σχ. 2.2α) δεν είναι σημειακή αλλά μια επιμήκης σχισμή με διεύθυνση παράλληλη



(Σχ. 2.2)

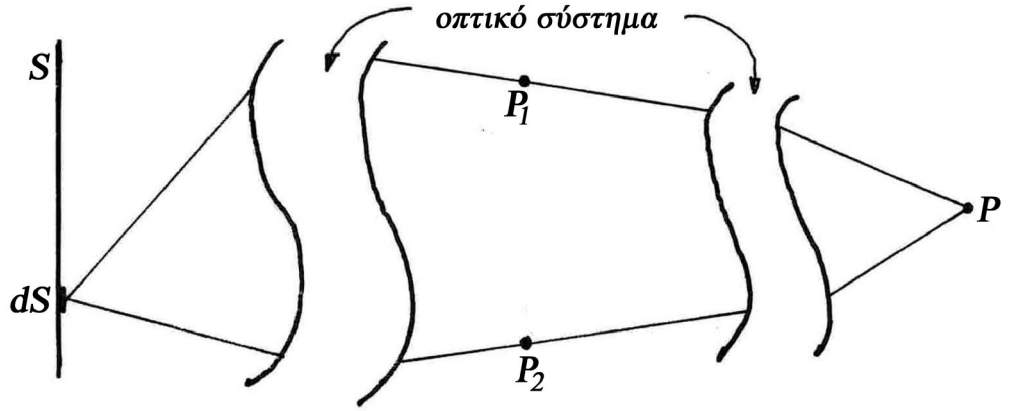
με την ευθεία που ενώνει τα δύο ανοίγματα P_1, P_2. Στη διάταξη αυτή γίνεται φανερό ότι η φωτίζουσα πηγή δεν είναι σημειακή αλλά εκτεταμένη (εδώ σε μία διάσταση).

Μας είναι γνωστό όμως (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 3) ότι η επαλληλία των διαταραχών που προέρχονται από τα P_1, P_2 όταν αυτά φωτίζονται από ένα σημείο S_0 της πηγής S είναι σύμφωνα μεταξύ τους. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο όταν τα P_1, P_2 φωτίζονται ταυτόχρονα από δύο ή και περισσότερα σημεία της. Μια σημειακή λοιπόν πηγή στο S_0, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αναδεικνύει ένα πρότυπο συμβολής με κέντρο το σημείο O_0. Θα είναι ορισμένης περιόδου (σχ. 6.4.1.18) που εξαρτάται από την απόσταση $d = P_1P_2$, το μ.κ. λ της πηγής και την απόσταση διαφράγματος πετάσματος L (προσέγγιση μακρινού πεδίου). Με τον ίδιο τρόπο μια άλλη σημειακή πηγή S_N, αναδεικνύει ένα πανομοιότυπο πρότυπο συμβολής, με μόνη διαφορά ότι το κέντρο της κατανομής του είναι μετατοπισμένο στη θέση O_N κ.ο.κ. Τελικά μπορούμε να πούμε ότι η συνολική κατανομή της έντασης στο πέτασμα που θα προκύψει όταν τα P_1, P_2 φωτιστούν από μια εκτεταμένη γραμμική πηγή θα είναι το άθροισμα των κατανομών των εντάσεων (ασύμφωνη επαλληλία) που οφείλονται σε κάθε μια από τις σημειακές πηγές που συνθέτουν την εκτεταμένη πηγή. Το τελικό αποτέλεσμα μιας τέτοιας διαδικασίας θα είναι η μείωση (ή ακόμη και ο μηδενισμός) της φωτοαντίθεσης των κροσσών συμβολής. Η ελάττωση αυτή γίνεται εμφανής αν π.χ. θεωρήσουμε ότι η πηγή αποτελείται α) από πέντε και β) από εννέα σημειακές πηγές. Στο (Σχ. 2.2 β) βλέπουμε ότι η άθροιση των πέντε μετατοπισμένων κατανομών έντασης, μας δίνει $I_{\min} \neq 0$, γεγονός που αναδεικνύει την ελάττωση της φωτοαντίθεσης των κροσσών. Η φωτοαντίθεση γίνεται ακόμη μικρότερη, όταν θεωρήσουμε την επαλληλία των εννέα, κατανομών έντασης (Σχ. 2.2γ).

Ο υπολογισμός του τελικού προτύπου συμβολής γίνεται ιδιαίτερα πολύπλοκος όταν η φωτίζουσα πηγή εκτείνεται σε δύο διαστάσεις. Η επίλυση αυτού του προβλήματος επιτυγχάνεται με βάση το θεώρημα των Van Cittert - Zernike για το οποίο θα αναφερθούμε στα επόμενα. Αφορά στον προσδιορισμό του χωρικού βαθμού συμφωνίας στα σημεία P_1, P_2 όταν αυτά φωτίζονται από εκτεταμένη και ομογενή από απόψεως φωτισμού (ή ακριβέστερα αφετικής ικανότητας) πηγή δύο διαστάσεων. Το αποτέλεσμα οδηγεί στην ανάδειξη του λεγόμενου ***μιγαδικού βαθμού χωρικής συμφωνίας (complex degree of spatial coherence)***. Ο τελευταίος εμφανίζεται στη σχέση που μας δίνει την τελική κατανομή της έντασης του προτύπου συμβολής και καθορίζει την φωτοαντίθεση των κροσσών σαν συνάρτηση: του σχήματος της πηγής, των διαστάσεων της, της απόστασης μεταξύ των P_1, P_2 καθώς και της απόστασης τους από την πηγή.

Θεωρούμε μια εκτεταμένη πηγή S (Σχ. 2.3) που εκπέμπει μονοχρωματικό φως το οποίο φθάνει σε δύο σημεία P_1, P_2 κατ' ευθεία ή μέσω ενός οπτικού συστήματος. Οι διαταραχές στα P_1, P_2 που προέρχονται από ένα στοιχειώδες τμήμα dS

της S είναι κατά τα γνωστά (ΠΑΡ/ΜΑ 3) σύμφωνες. Ασύμφωνες όμως, όταν προέρχονται από δύο ή περισσότερα τμήματά της. Αν οι συνολικές διαταραχές στα P_1, P_2 (από όλα τα τμήματα της πηγής) παρουσιάζουν κάποια μερική συσχέτιση



(Σχ. 2.3)

των φάσεων μεταξύ τους, τότε μπορούμε να λέμε ότι είναι μερικά σύμφωνες. Είναι δυνατόν τελικά κάτω από αυτές τις συνθήκες να προσδιορίσουμε ένα ***βαθμό συμφωνίας (degree of coherence),*** που θ' αποτελεί και το μέτρο του βαθμού κατά το οποίο συσχετίζονται οι φάσεις στα σημεία P_1, P_2. Θεωρούμε ότι οι διαταραχές που προέρχονται από τα P_1, P_2 συνεχίζουν την πορεία τους ελεύθερα ή μέσω ενός οπτικού συστήματος και έρχονται σε επαλληλία στο σημείο P. Αν οι συνολικές διαταραχές στα P_1, P_2 είναι σύμφωνες μεταξύ τους τότε στο P θα έχουμε το άθροισμα των πλατών και η ένταση στο ίδιο σημείο θα είναι ανάλογη του τετραγώνου του αθροίσματός τους. Στην περίπτωση που οι διαταραχές στα P_1, P_2 είναι ασύμφωνες, τότε η συνολική ένταση στο P θα είναι ανάλογη με το άθροισμα των δύο ξεχωριστών εντάσεων από τα P_1, P_2 στη θέση αυτή.

Τα μιγαδικά πλάτη του φωτός ορισμένης συχνότητας στα σημεία P_1, P_2 αντίστοιχα, που δημιουργούνται από μια στοιχειώδη πηγή dS της S, θα είναι ανάλογα της $\sqrt{dS}U_1$ και $\sqrt{dS}U_2$. Αν τώρα f_1 και f_2 είναι τα μιγαδικά πλάτη στο P που προκύπτουν από διαταραχές μοναδιαίου πλάτους και μηδενικής φάσης στα P_1, P_2 τότε το μιγαδικό πλάτος στο P που παράγεται από τη στοιχειώδη πηγή dS θα είναι: $(f_1U_1 + f_2U_2)\sqrt{dS}$ και η έντασή του:

$$dI_P = \left|f_1U_1 + f_2U_2\right|^2 dS \tag{2.1}$$

Κατά προέκταση η ένταση του φωτός στο P που οφείλεται στο σύνολο των στοιχειωδών πηγών της S θα είναι το άθροισμα όρων όπως αυτός της (σχ. 2.1) δηλ.

$$I_p = \iint_S \left| f_1 U_1 + f_2 U_2 \right|^2 dS \tag{2.2}$$

με την ολοκλήρωση να εκτείνεται σ' όλο το εύρος της πηγής. Επειδή $\left| f_1 U_1 + f_2 U_2 \right|^2 = \left| f_1 \right|^2 \left| U_1 \right|^2 + \left| f_2 \right|^2 \left| U_2 \right|^2 + f_1 U_1 f_2^* U_2^* + f_2 U_2 f_1^* U_1^*$, θέτοντας:

$$I_1 = \iint_S \left| U_1 \right|^2 dS, \qquad I_2 = \iint_S \left| U_2 \right|^2 dS \tag{2.3}$$

βρίσκουμε : $$I_P = | f_1 |^2 \, I_1 + | f_2 |^2 \, I_2 + 2\,\mathrm{Re}\left\{ \iint_S U_1^* U_2 f_1^* f_2 dS \right\} \tag{2.4}$$

στην οποία φθάσαμε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των μιγαδικών αριθμών:

$$z_1 z_2^* + z_1^* z_2 = 2Re\left\{ z_1^* z_2 \right\} \tag{2.5}$$

και όπου I_1, I_2 οι εντάσεις στα σημεία P_1, P_2 που οφείλονται στην πηγή S. Η (σχ. 2.4) είναι δυνατόν να γραφεί:

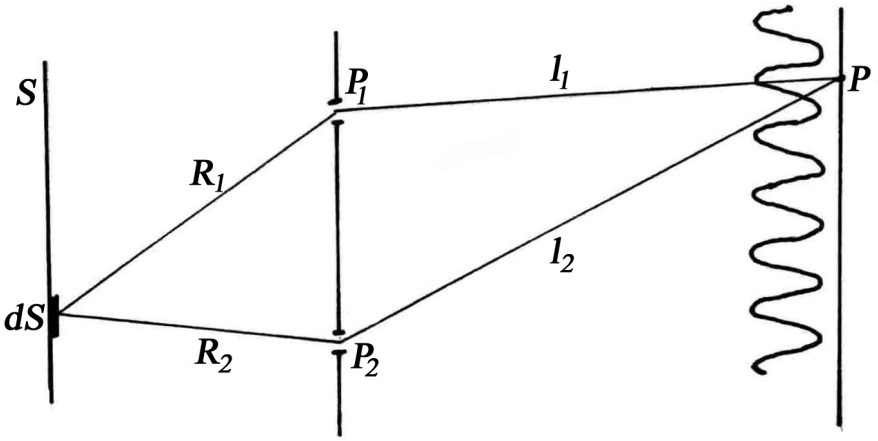
$$I_P = | f_1 |^2 \, I_1 + | f_2 |^2 \, I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{Re}\left\{ \Gamma_{21} f_1^* f_2 \right\} \tag{2.6}$$

όπου η: $$\Gamma_{21} = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \iint U_1^* U_2 dS \tag{2.7}$$

καθορίζει το βαθμό συμφωνίας της διαταραχής στο σημείο P_2 σχετικά με το σημείο P_1. Σύμφωνα με τη (σχ. 2.6), η ένταση στο P μπορεί να βρεθεί γνωρίζοντας τις εντάσεις στα P_1, P_2 και το μιγαδικό βαθμό συμφωνίας Γ_{12}. Οι f_1, f_2 καθορίζουν τις οπτικές ιδιότητες των δρόμων $P_1 P$ και $P_2 P$.

Οι (σχ. 2.6,7) γίνονται περισσότερο κατανοητές αν προσαρμόσουμε την παραπάνω θεωρία στο πείραμα συμβολής του Young από δύο ανοίγματα στις θέσεις P_1, P_2 (Σχ. 2.4). Με την προϋπόθεση ότι η εκτεταμένη πηγή S φαίνεται από το πέτασμα όπου βρίσκονται τα ανοίγματα P_1, P_2 με μικρή σχετικά γωνία, οι διαταραχές

U_1, U_2 στα P_1, P_2 μπορούν να γραφούν προσεγγιστικά με τη μορφή σφαιρικών κυμάτων πλάτους A οπότε:



(Σχ. 2.4)

$$U_1 = Ae^{i\theta_1} \qquad U_2 = Ae^{i\theta_2} \tag{2.8}$$

με: $A = a/R_1 \simeq a/R_2$ και $\theta_1 = -kR_1,\ \theta_2 = -kR_2$. Τότε:

$$I_1 = I_2 = A^2 \iint_S dS = A^2 S \tag{2.9}$$

με S το εμβαδόν της πηγής. Επομένως από τη (σχ. 2.7) βρίσκουμε:

$$\Gamma_{21} = \frac{1}{S} \iint e^{i(\theta_2 - \theta_1)} dS \tag{2.10}$$

Αν η πηγή είναι πολύ μικρών διαστάσεων ή τα P_1, P_2 είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, η διαφορά φάσης $\theta_2 - \theta_1$ μπορεί να θεωρηθεί σταθερή οπότε:

$$\Gamma_{21} = e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \tag{2.11}$$

Σε αντίθετη περίπτωση η $\theta_2 - \theta_1$ στη (σχ. 2.10) θα δέχεται μεγάλες μεταβολές κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος οπότε:

$$\Gamma_{21} = 0 \tag{2.12}$$

Φαίνεται λοιπόν σαφώς ότι η συνάρτηση Γ_{21} καθορίζεται από το βαθμό κατά τον οποίο μεταβάλλεται η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων P_1, P_2 για φως που προέρχεται από τα διαφορετικά σημεία της πηγής S. Όταν η μεταβολή αυτή είναι $\ll 2\pi$ τότε από τη (σχ. 2.11) βρίσκουμε $|\Gamma_{21}| = 1$ δηλ. οι διαταραχές στα P_1, P_2 είναι σύμφωνες μεταξύ τους με μια διαφορά φάσης ίση με το όρισμα της (σχ. 2.11). Όταν όμως η μεταβολή είναι $\gg 2\pi$ τότε $|\Gamma_{21}| = 0$ (σχ. 2.12) και οι διαταραχές στα P_1, P_2 είναι ασύμφωνες μεταξύ τους. Οι προαναφερόμενες είναι ακραίες περιπτώσεις. Στη γενική περίπτωση θα έχουμε:

$$\Gamma_{21} = V_{21} e^{i\beta_{21}} \tag{2.13}$$

οπότε η (σχ. 2.6) για

$$f_1 = \alpha_1 e^{-ikl_1} \quad , \quad f_2 = \alpha_2 e^{-ikl_2} \tag{2.14}$$

όπου α_1, α_2 είναι τα πραγματικά πλάτη στο P από μοναδιαία πλάτη στα P_1, P_2 γράφεται:

$$I_P = I_1' + I_2' + 2V_{21}\sqrt{I_1' I_2'} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l_2 - l_1) + \beta_{21}\right] \tag{2.15}$$

όπου $I_1' = \alpha_1^2 I_1$ και $I_2' = \alpha_2^2 I_2$ είναι οι ξεχωριστές εντάσεις στη θέση P. Όταν $V_{21} = |\Gamma_{21}| = 0$, υπάρχει ασυμφωνία των διαταραχών στα P_1, P_2 οπότε στο P θα έχουμε πρόσθεση των εντάσεων. Αν $V_{21} = |\Gamma_{21}| = 1$, στο P θα έχουμε πρόσθεση των πλατών επειδή οι διαταραχές στα P_1, P_2 είναι μεταξύ τους σύμφωνες με μια επιπλέον διαφορά φάσης β_{21} μεταξύ τους. Όταν $0 < V_{21} < 1$ θα υφίσταται μερική συμφωνία μεταξύ των διαταραχών στα P_1, P_2 και ο μερικός συσχετισμός των φάσεων καθορίζεται από το μέτρο της Γ_{21} και τη διαφορά φάσης β_{21}.

Η κατανομή της έντασης του φωτός δηλ. το πρότυπο των κροσσών συμβολής θα δίνεται από τη (σχ. 2.15) συναρτήσει της μετατόπισης του P που καθορίζεται από τη διαφορά δρόμου $l_1 - l_2$. Τα μέγιστα και τα ελάχιστα της έντασης θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$I_{\max} = I_1' + I_2' + 2V_{21}\sqrt{I_1' I_2'} \quad , \quad I_{\min} = I_1' + I_2' - 2V_{21}\sqrt{I_1' I_2'} \tag{2.16}$$

Τότε η φωτοαντίθεση των κροσσών με βάση τη (σχ. 6.4.1.20):

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \tag{2.17}$$

θα γράφεται: $$\mathcal{V} = V_{21} \frac{2\sqrt{I_1' I_2'}}{I_1' + I_2'} \tag{2.18}$$

Για $V_{21} = 1$ τότε $\mathcal{V}_{max} = 2\sqrt{I_1' I_2'} / \left(I_1' + I_2'\right)$. Για $V_{21} = 0 \Rightarrow \mathcal{V} = 0$ (βλ. Σχ. 6.4.1.8). Οι θέσεις των μεγίστων συναντούνται στα σημεία για τα οποία θα ισχύει:

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(l_1 - l_2\right) + \beta_{21} = 2m\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{2.19}$$

Τελικά βλέπουμε ότι στην περίπτωση που έχουμε συμβάλλουσες διαταραχές μερικά χωρικά σύμφωνες μεταξύ τους, η φωτοαντίθεση των κροσσών συμβολής εξαρτάται από το μέτρο $V_{21} = \left|\Gamma_{21}\right|$ της συνάρτησης της (σχ. 2.13) που καθορίζει το βαθμό συμφωνίας. Επίσης η θέση εμφάνισης των κροσσών θα εξαρτάται και από το όρισμα β_{21} της ίδιας συνάρτησης.

Η προηγούμενη ανάλυση ισχύει μόνο για την περίπτωση όπου το φως που εκπέμπει η πηγή είναι μονοχρωματικό. Αν όμως το φως της είναι ευρείας φασματικής κατανομής, τότε η συνολική ένταση σ' ένα σημείο θα βρεθεί με την ολοκλήρωση της μονοχρωματικής έντασης στο σημείο αυτό, υπεράνω του εύρους των συχνοτήτων. Επομένως ο μιγαδικός βαθμός συμφωνίας θα συνίσταται από δύο παράγοντες: τον ***χωρικό*** που θα εξαρτάται από τις διαστάσεις της πηγής και την απόσταση P_1P_2 και τον ***χρονικό*** που θα εξαρτάται από το φασματικό εύρος της πηγής. Τότε οι διαταραχές στα σημεία P_1, P_2 θα χαρακτηρίζονται γενικότερα από ένα ορισμένο βαθμό χωρο-χρονικής συμφωνίας.

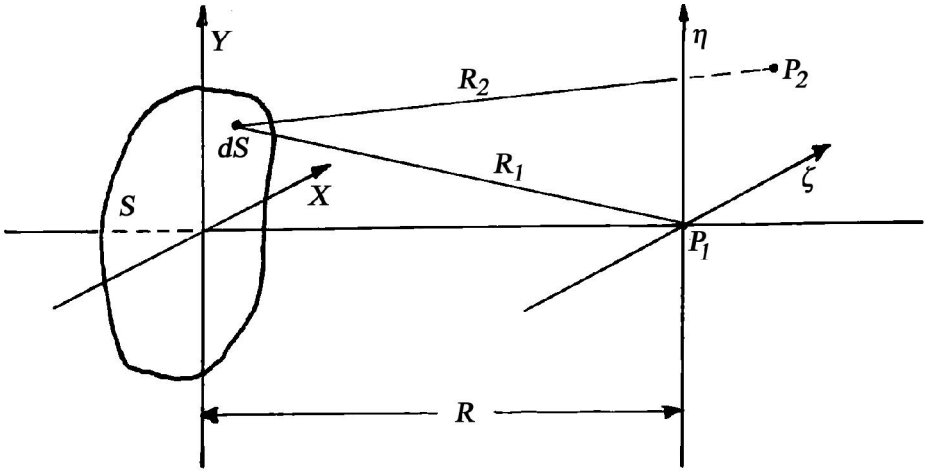
*Το θεώρημα των Van Cittert - Zernike**

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μια επίπεδη εκτεταμένη πηγή S (Σχ. 2.5) η οποία φωτίζει δύο σημεία P_1, P_2 που βρίσκονται σ' ένα επίπεδο σε απόσταση R από αυτήν. $\left(X, Y\right)$ είναι οι συντεταγμένες μιας στοιχειώδους πηγής dS_0, της οποίας η ένταση (αφετική ικανότητα) του φωτός που υποτίθεται μονοχρωματικό είναι $\gamma_0\left(X, Y\right)$. Θεωρούμε επίσης ότι το σημείο P_1 βρίσκεται στην αρχή του συστήματος

* H.H.Hopkins: 'Theory of coherence and applications' (Advanced Optical Techniques. Ed. by A.VAN HELL N.H. 1976).

συντεταγμένων ζ,η και οι συντεταγμένες του P_2 είναι (ζ,η). Τα πλάτη που οφείλονται στην dS_0 *και* που παράγονται στα σημεία P_1, P_2 θα είναι:

$$U_1 = \frac{\sqrt{\gamma_0(X,Y)}}{R_1} e^{-ikR_1} \qquad \text{και} \qquad U_2 = \frac{\sqrt{\gamma_0(X,Y)}}{R_2} e^{-ikR_2}.$$



(Σχ. 2.5)

Τότε λαμβάνοντας υπόψη μας τις συνθήκες παραξονικής προσέγγισης: $(1/R_1R_2) \simeq 1/R^2$, $R_1 - R_2 = (X\zeta + Y\eta)/R$ και $I_1 = I_2 = \frac{1}{R^2}\iint_S \gamma_0(X,Y)\,dS_o$. Αν επίσης γράψουμε: $\gamma(X,Y) = \gamma_0(X,Y) \Big/ \iint_S \gamma_0(X,Y)dS_0$, τότε η αντικατάσταση των παραπάνω στη (σχ. 2.7) μας δίνει:

$$\Gamma_{21} = \Gamma(\zeta,\eta) = \iint_S \gamma(X,Y) e^{\frac{2\pi}{\lambda} i \frac{(X\zeta + Y\eta)}{R}} dXdY \tag{2.20}$$

Από την τελευταία σχέση οδηγούμαστε στο σπουδαίο συμπέρασμα ότι ο βαθμός χωρικής συμφωνίας $\Gamma_{21} = \Gamma(\zeta,\eta)$ μιας διαταραχής στο P_2 σε σχέση με αυτήν στο P_1 ή γενικότερα υπεράνω του φωτιζομένου επιπέδου σε απόσταση R από την πηγή, προσδιορίζεται από τον μετασχηματισμό Fourier της (κανονικοποιημένης) κατανομής της έντασης (αφετικής ικανότητας) της πηγής. Η τελευταία πρόταση συνιστά τη διατύπωση του θεωρήματος των Van Cittert - Zernike. Αποδεικνύεται με τη βοήθεια μιας κανονικοποιημένης μορφής των συντεταγμένων (X,Y) και (ζ,η), ότι ο

μετασχηματισμός Fourier (σχ. 2.20) μπορεί να γραφεί στην παραξονική πάντα προσέγγιση ως εξής:

$$\Gamma_{21} = \Gamma(u,\upsilon) = e^{i\varepsilon} \iint_S \gamma(x,y)\, e^{2\pi i(ux+\upsilon y)} dxdy \tag{2.21}$$

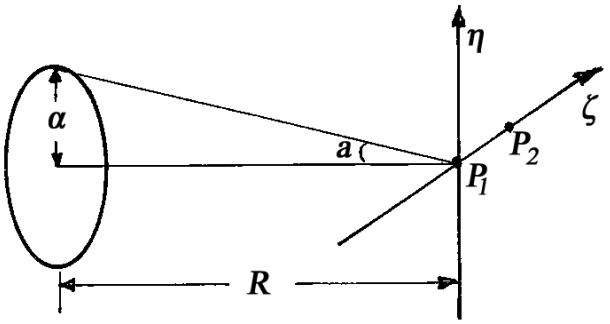
$$\text{όπου: } \varepsilon = k\left(\frac{\zeta^2+\eta^2}{2R}\right), \quad x = X/a, \quad y = Y/a, \quad u = \frac{n\sin a}{\lambda}\zeta, \quad \upsilon = \frac{n\sin a}{\lambda}\eta \tag{2.22}$$

$\sin a = a/R$ είναι το ήμισυ του γωνιακού ανοίγματος της πηγής όπως φαίνεται από το σημείο P και a η ακτίνα της. n ο δ.δ. του χώρου μεταξύ της πηγής και των P_1, P_2. Επίσης:

$$\gamma(x,y) = \frac{\gamma(x,y)}{\iint_S \gamma(x,y)\, dxdy} \tag{2.23}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο βαθμός χωρικής συμφωνίας πάνω σ' ένα επίπεδο που απέχει απόσταση R από κυκλική πηγή ακτίνας a της οποίας η ένταση (αφετική ικανότητα) είναι ομογενής σε όλη την επιφάνεια (Σχ. 2.6) και εκπέμπει μονοχρωματικό φως μ.κ. λ.



(Σχ. 2.6)

- Επειδή η ένταση της πηγής είναι ομοιόμορφη θα έχουμε $\gamma_0(x,y) = 1$ οπότε η (σχ. 2.23) γίνεται:

$$\gamma(x,y) = \frac{1}{\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy} = \frac{1}{\pi} \qquad (\text{επειδή: } X^2+Y^2 = a^2 \to x^2+y^2 = 1\ )$$

Επομένως από τη (Σχ. 2.21) βρίσκουμε:

$$\Gamma_{21} = \Gamma(u,\upsilon) = \frac{e^{-i\varepsilon}}{\pi} \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} e^{2\pi i(ux+\upsilon y)} dxdy \tag{2.24}$$

Ο υπολογισμός του τελευταίου ολοκληρώματος είναι πανομοιότυπος με αυτόν του υπολογισμού της κατανομής του πλάτους της Η/Μ διαταραχής του προτύπου περίθλασης από κυκλικό άνοιγμα, στην περιοχή της περίθλασης Fraunhofer (μακρινού πεδίου) (βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός (§ 7.5.1)). Γίνεται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού σε πολικές συντεταγμένες $(u,\upsilon)\to(p,\psi)$ και $(x,y)\to(r,\phi)$. Σαν τελικό αποτέλεσμα θα έχουμε (με την προϋπόθεση ότι $\varepsilon \ll 1$):

$$\Gamma_{21} = \Gamma(u,\upsilon) = \Gamma(p) = 2J_1(2\pi p)/2\pi p \tag{2.25}$$

Η γραφική παράσταση της (σχ. 2.25) συναρτήσει του $2\pi p$ φαίνεται στο (Σχ. 2.7α), όπου το p δίνεται από τη σχέση:

$$p^2 = u^2 + \upsilon^2 = \frac{n^2 \sin^2 \mathrm{a}}{\lambda^2}\left(\zeta^2 + \eta^2\right) \Rightarrow p = \frac{n \sin \mathrm{a}}{\lambda}\sqrt{\zeta^2+\eta^2} = \frac{n \sin \mathrm{a}}{\lambda} d \tag{2.26}$$

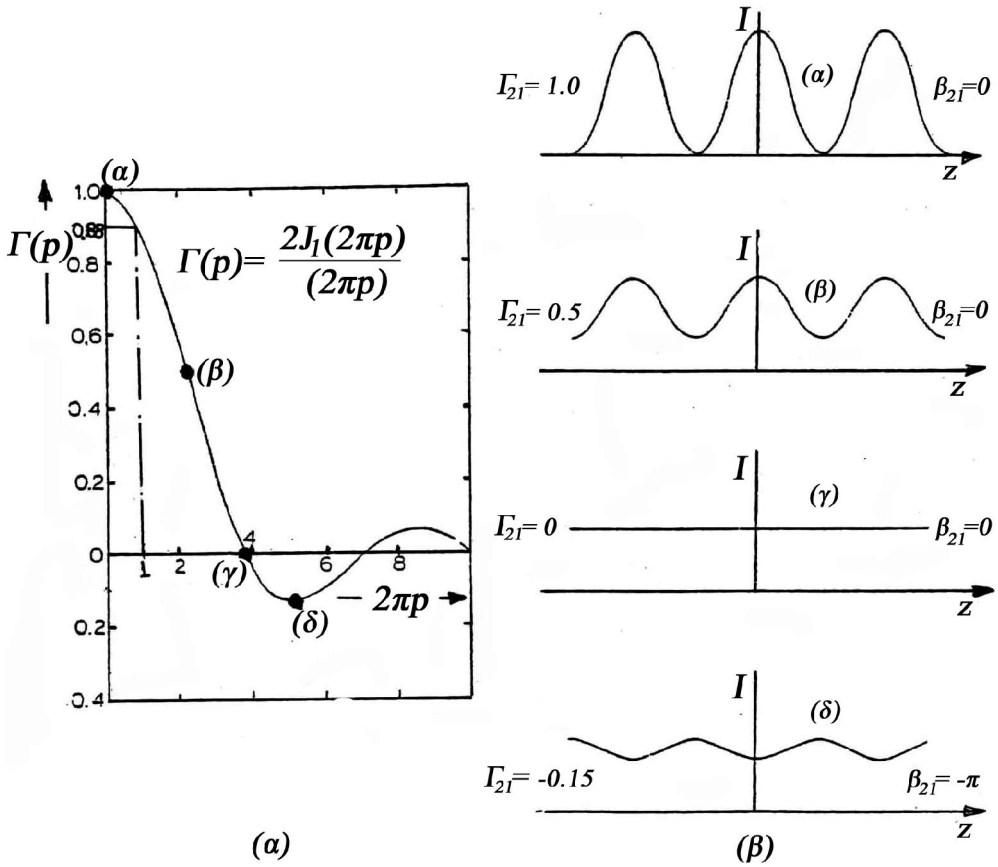
με $d = P_1P_2$. Ο βαθμός συμφωνίας παίρνει για πρώτη φορά μηδενική τιμή όταν $2\pi p = 3.83$ οπότε $p = 0.61$. Δηλ. όταν $d = 0.61\lambda / n\sin \mathrm{a}$ όπου $\mathrm{a} \simeq a/R(\mathrm{rad})$ επειδή $\sin \mathrm{a} \simeq \tan \mathrm{a} \simeq \mathrm{a}$.

Όπως φαίνεται στο (Σχ. 2.7α) καλή συμφωνία μεταξύ των P_1, P_2 $(d = P_1P_2)$ πετυχαίνουμε όταν $2\pi p \le 1$. Το γεγονός αυτό πράγματι μας οδηγεί στο να βρούμε ότι $\Gamma_{21} = 2J_1(2\pi p)/2\pi p = 2J_1(1)/1 = 0.88$. Επομένως για $2\pi p < 1 \Rightarrow \Gamma_{21} > 0.88$. Και επειδή $p = n\sin \mathrm{a} d/\lambda$ η $2\pi p \le 1$ γίνεται:

$$d \le \frac{0.61\lambda}{n\sin \mathrm{a}} \quad \text{ή} \quad \sin \mathrm{a} \le \frac{0.61\lambda}{nd} \tag{2.27}$$

Οι (σχ. 2.27) μας δίνουν τις συνθήκες για την απόσταση $d = P_1P_2$ ή το μέγεθος της πηγής ($\mathrm{a} \simeq a/R$) όπου a η ακτίνα της πηγής, προκειμένου να έχουμε καλή συμφωνία. Για μια σταθερή απόσταση $d = P_1P_2$ όπως συμβαίνει στο πείραμα του Young, η ευκρίνεια των κροσσών ελαττώνεται με την αύξηση του μεγέθους της πηγής. Θα

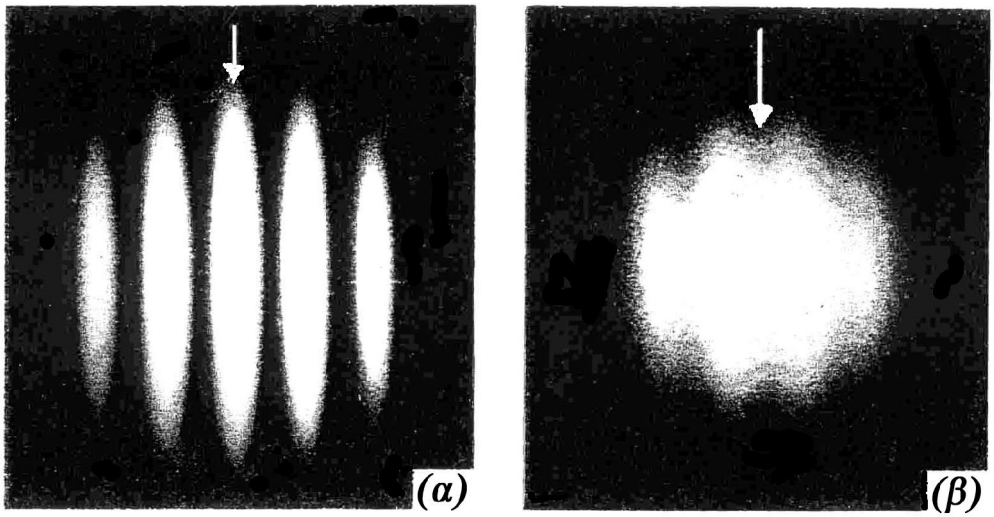
είναι μηδέν για πρώτη φορά (ομοιόμορφη κατανομή έντασης όταν $2\pi p$ =3.83. Για $2\pi p = 3.83$ $\Gamma(p) < 0$. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι $\beta_{21} = \pm\pi$ και οι κροσσοί μετατοπίζονται έτσι ώστε οι θέσεις των μεγίστων καταλαμβάνονται από θέσεις ελαχίστων (αντιστροφή της φωτοαντίθεσης των κροσσών). Για $2\pi p > 7.02$ θα έχουμε και πάλι αντιστροφή της φωτοαντίθεσης, η τιμή όμως του βαθμού συμφωνίας θα έχει ελαττωθεί κατά πολύ. Στο (Σχ. 2.7 β) φαίνεται η γραφική παράσταση της φωτοαντίθεσης των κροσσών συμβολής για τιμές του βαθμού συμφωνίας (α): $\Gamma(p) = 1.0$ (β): $\Gamma(p) = 0.5$, (γ): $\Gamma(p) = 0$ και (δ): $\Gamma(p) = -0.15$. Βλέπουμε χαρακτηριστικά στο διάγραμμα (δ) του (Σχ. 2.7β) την αντιστροφή της φωτοαντίθεσης των κροσσών της συμβολής. Στην (Εικ. 2.8) μπορούμε να δούμε τα πρότυπα συμβολής των κροσσών που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις (α): $\Gamma(p) = 1.0, \beta_{21} = 0$ και (δ): $\Gamma(p) = -0.15, \beta_{21} = -\pi$.



(Σχ. 2.7)

Ενώ στο κέντρο της κατανομής της εικόνας (α) έχουμε μέγιστο, στο αντίστοιχο κέντρο της (δ) εμφανίζεται ελάχιστο λόγω της αντιστροφής της φωτοαντίθεσης. Συ-

μπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι με τη βοήθεια του θεωρήματος των Van Cittert - Zernike, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε το βαθμό χωρικής συμφωνίας των διαταραχών πάνω σ' ένα επίπεδο το οποίο φωτίζεται από μια εκτεταμένη πηγή που βρίσκεται σε ορισμένη απόσταση από το τελευταίο.



(Εικ. 2.8)

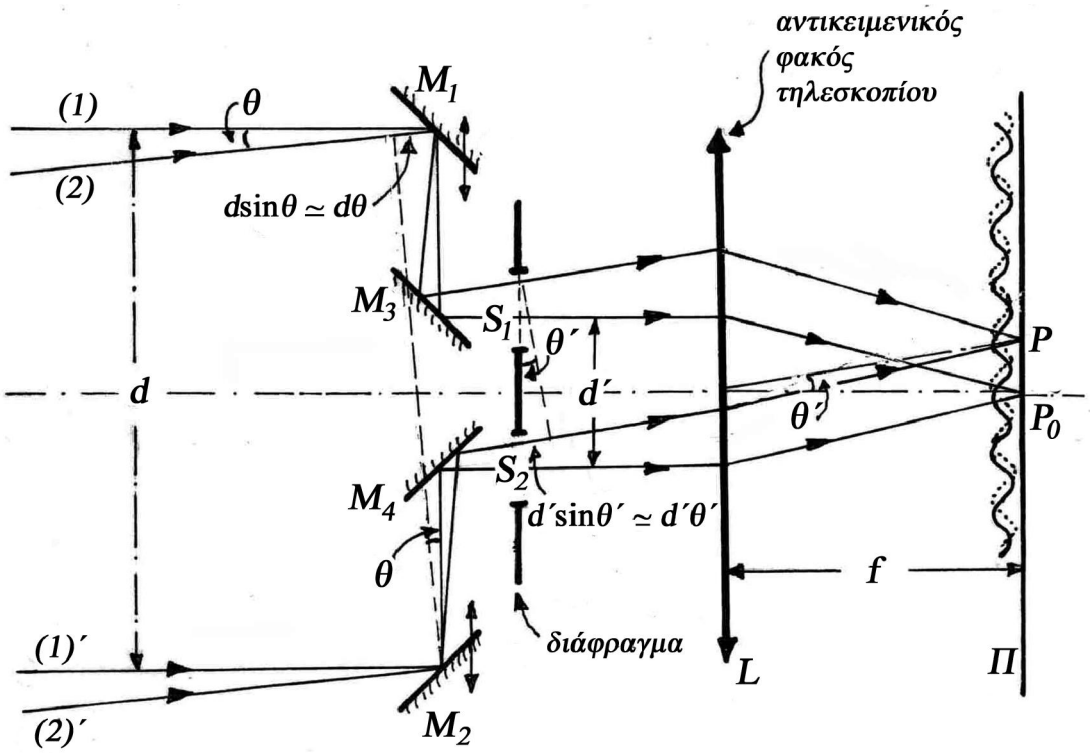
Παράδειγμα

Ο ήλιος αποτελεί μια εκτεταμένη πηγή η οποία φωτίζει την επιφάνεια της γης. Θεωρούμε ότι εκπέμπει μονοχρωματικό φως με μέσο μ.κ. $\bar{\lambda} = 0.55 \times 10^{-3}$mm και ότι το ήμισυ του γωνιακού του ανοίγματος από τη γη είναι $(a/R) \simeq 0.0047$rad (a η ακτίνα του και R η απόστασή του από τη γη). Να υπολογιστεί η περιοχή συμφωνίας που δημιουργεί στην επιφάνεια της γης.

- Με τη βοήθεια της (σχ. 2.27) η απόσταση $d = P_1P_2$ μεταξύ δύο σημείων στα οποία οι διαταραχές οι προερχόμενες από τον ήλιο συσχετιζόμενες έχουν αρκετά καλό βαθμό συμφωνίας θα είναι: $d \leq \dfrac{0.16\bar{\lambda}}{n\sin a} \simeq \dfrac{0.16\bar{\lambda}}{na} = \dfrac{0.16R\bar{\lambda}}{a}$ ($a \simeq a/R$). Αλλά: $(a/R) \simeq 0.0047$rad και $\bar{\lambda} = 0.55 \times 10^{-3}$mm. Οπότε: $d \leq 0.019$mm. Επομένως αν μεταξύ αυτού του διαστήματος τοποθετήσουμε σε πέτασμα δύο όμοια ανοίγματα, τότε φέρνοντάς το σε επαφή με το μάτι μας και βλέποντας δια μέσου του τον ήλιο, μπορούμε να παρατηρήσουμε φαινόμενα συμβολής (οι κροσσοί συμβολής θα διαμορφώνουν τον δίσκο του ήλιου). Ένα παρόμοιο πείραμα περιγράφουμε λεπτομερειακά στο κεφάλαιο που αναφέρεται στην ανάδειξη φαινομένων που σχετίζονται με τη συμβολή του φωτός.

Το αστρικό συμβολόμετρο του Michelson

Πρόκειται για τη χρησιμοποίηση ενός κλασικού διοπτρικού τηλεσκοπίου (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (ΘΕΜΑ 2)), σε συνδυασμό με τα πορίσματα της θεωρίας της μερικής συμφωνίας του φωτός. Η εφαρμογή του στην Αστρονομία έχει σαν σκοπό τον ακριβή υπολογισμό γωνιακών ανοιγμάτων πολύ μακρινών ουρανίων σωμάτων. Ο επιπλέον υπολογισμός των αποστάσεών τους, που κατά τα γνωστά στηρίζεται σε παραλλακτικές μεθόδους, έχει σαν αποτέλεσμα τον προσδιορισμό των διαστάσεών τους. Αποτελείται από δύο κάτοπτρα M_1, M_2 (Σχ. 2.9) τα οποία έχουν τη δυνατότητα να κινούνται ταυτόχρονα και αντίθετα κατά μήκος μιας διεύθυνσης που είναι παράλληλη με τη διάμετρο του αντικειμενικού φακού L του τηλεσκοπίου. Πρόκειται για τα κάτοπτρα που δέχονται τις διαταραχές από τα μακρινά αντικείμενα και η απόστασή τους είναι d. Το φως βέβαια που προέρχεται π.χ. από



(Σχ. 2.9)

ένα άστρο σε πολύ μεγάλη απόσταση, φθάνει με τη μορφή επιπέδου μετώπου κύματος σε δύο θέσεις του οποίου (εδώ αυτές κατέχονται από τα κάτοπτρα M_1, M_2) υποθέτουμε ότι υφίσταται ένας ορισμένος βαθμός χωρικής συμφωνίας. Κατόπιν τα δύο αυτά τμήματα του επιπέδου μετ. κύματος, ανακλώμενα στα κάτοπτρα M_3, M_4 οδηγούνται σε δύο ανοίγματα S_1, S_2 που απέχουν απόσταση d' μεταξύ τους και

βρίσκονται σε συμμετρική θέση μπροστά από τον αντικειμενικό φακό του τηλεσκοπίου.

Επειδή οι οπτικοί δρόμοι $M_1M_3S_1, M_2M_4S_2$, είναι ακριβώς ίδιοι, τότε ο βαθμός συμφωνίας μεταξύ των M_1, M_2 διατηρείται και στις θέσεις S_1, S_2. Τελικά τα μετ. κύματος που προέρχονται από τα S_1, S_2 συσχετίζονται ερχόμενα σε επαλληλία στο πέτασμα Π που κατέχει το πίσω εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού του τηλεσκοπίου. Εκεί παρατηρούνται φαινόμενα συμβολής. Η περίοδος T των κροσσών συμβολής (με κέντρο το P_0) που είναι κάθετοι στην διεύθυνση M_1, M_2 εξαρτάται κατά τα γνωστά από τις παραμέτρους $d', \bar{\lambda}, f$ (μέσω της σχέσης $T = \bar{\lambda} f / d'$) όπου $\bar{\lambda}$ το μέσο μ.κ. της μακρινής πηγής και f η εστιακή απόσταση του αντικειμενικού φακού L. Η φωτοαντίθεσή τους θα εξαρτάται από το βαθμό χωρικής συμφωνίας στις θέσεις M_1, M_2 και της χρονικής συμφωνίας της πηγής λόγω της συγκεκριμένης φασματικής της κατανομής.

Σημείωση

Στην ανάλυση που προηγήθηκε, χρησιμοποιήθηκε διαθλαστικό αστρικό συμβολόμετρο. Εντούτοις η ίδια διαδικασία ισχύει αν στη θέση του διαθλαστικού, χρησιμοποιηθεί ένα κατοπτρικό τηλεσκόπιο (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική (§ 3.2.3)). στην περίπτωση αυτή το σύστημα των κατόπτρων M_1, M_2, M_3, M_4 τοποθετείται μπροστά από το σωλήνα του αντίστοιχου τηλεσκοπίου (Σχ. 3.2.3.6). Και όσον αφορά τις παρατηρήσεις των κροσσών, αυτές γίνονται στο εστιακό επίπεδο του παραβολικού (αντικειμενικού) συνήθως κατόπτρου του τηλεσκοπίου.

α) *Χρήση του αστρικού συμβολόμετρου του Michelson για τον υπολογισμό του γωνιακού ανοίγματος μακρινού αστέρα*

Θεωρούμε κατ' αρχή ότι η επιφάνεια του αστέρα προς τον οποίο είναι στραμμένο το τηλεσκόπιο, εκπέμπει φως ομογενώς δηλ. η αφετική του ικανότητα είναι σταθερή. Επομένως μπορούμε να δεχθούμε ότι πρόκειται για μια κυκλική πηγή ακτίνας a σε απόσταση R. Τότε το ήμισυ του γωνιακού της ανοίγματος θα είναι $\sin a \simeq \tan a = a/R$. Έχουμε όμως ήδη υπολογίσει ότι μια τέτοια πηγή, της οποίας το μέσο μ.κ. εκπομπής είναι $\bar{\lambda}$ σ' ένα επίπεδο σε μια απόσταση R, δημιουργεί χωρική συμφωνία της οποίας ο βαθμός της Γ_{21} με βάση τη (σχ. 2.25) θα είναι:

$$\Gamma_{21} = \Gamma_{M_2M_1} = 2J_1(2\pi p)/2\pi p \qquad (2.28)$$

όπου $p = \sin \mathrm{a} d/\bar{\lambda}$ με d την απόσταση μεταξύ των κατόπτρων M_1, M_2 και δ.δ. $n = 1.0$. Γνωρίζουμε επίσης ότι για πρώτη φορά θα είναι $\Gamma_{M_2M_1} = 0$ όταν $2\pi p = 3.83$ (Σχ. 2.7α) οπότε $p = 0.61$ δηλ.

$$d = \frac{0.61\bar{\lambda}}{\sin \mathrm{a}} \simeq \frac{0.61\bar{\lambda}}{\mathrm{a}} \quad \text{και τελικά} \quad \mathrm{a} = \frac{0.61\bar{\lambda}}{d} \qquad (2.29)$$

Όταν λοιπόν τα κάτοπτρα M_1, M_2 μετακινηθούν από μια ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους μέχρις την απόσταση d για την οποία θα παρατηρηθεί για πρώτη φορά μηδενισμός της φωτοαντίθεσης των κροσσών συμβολής στο εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού φακού του τηλεσκοπίου, τότε από την (σχ. 2.29) είναι δυνατόν να υπολογιστεί το ήμισυ του γωνιακού ανοίγματος του αστέρος – γνωστού όντος του $\bar{\lambda}$ – το οποίο προσδιορίζεται φασματοσκοπικά.

Η μέτρηση αυτή έγινε για πρώτη φορά με το ανακλαστικό κατοπτρικό τηλεσκόπιο των 100Inch του όρους Wilson, για τον υπολογισμό του γωνιακού ανοίγματος του αστέρα Betelgeuse (a-Orionis). Η εξαφάνιση των κροσσών συμβολής συνέβη για $\mathrm{d} = 120\mathrm{Inch}$ οπότε για $\bar{\lambda} = 570\mathrm{nm}$ βρέθηκε ότι $\mathrm{a}=11.6\times10^{-8}\mathrm{rad}$. Άρα το γωνιακό άνοιγμα αυτού του άστρου θα είναι $\theta = 2\mathrm{a}=0.047''$. Με βάση τις μετρήσεις της παράλλαξής του, η απόστασή του από τη γη βρέθηκε ίση με 1.061949×10^{15} μίλια. Τότε από τη σχέση $D = R\theta$ βρίσκεται ότι το μήκος της διαμέτρου του είναι $D = 24\times10^{7}$ μίλια. Η απόσταση αυτή πλησιάζει τα όρια της τροχιάς του πλανήτη Άρη γύρω από τον ήλιο, δηλαδή περίπου 280 φορές μεγαλύτερη από τη διάμετρο του ήλιου.

β) *Χρήση του αστρικού συμβολόμετρου του Michelson για τον υπολογισμό του γωνιακού ανοίγματος διπλού αστέρα.*

Το αστρικό συμβολόμετρο προσανατολίζεται προς τον ένα από τους αστέρες του συστήματος. Τότε στα κάτοπτρα M_1, M_2 θα φθάνουν δύο επίπεδα μέτωπα κύματος (Σχ. 2.9). Το ένα (11΄) κατ' ευθείαν από τον πρώτο αστέρα και το δεύτερο (22΄) από το δεύτερο, με μία κλίση κατά γωνία θ όση και το γωνιακό τους άνοιγμα το οποίο τελικά θέλουμε να υπολογίσουμε. Το πρώτο μέτωπο κύματος δημιουργεί στο πίσω εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού φακού (ή κατόπτρου) του τηλεσκοπίου ένα σύστημα κροσσών συμβολής με κέντρο το σημείο P_0. Το δεύτερο (ασύμφωνο σε σχέση με το πρώτο) αναπτύσσει ένα άλλο σύστημα κροσσών συμβολής

(με κέντρο το σημείο P) το οποίο όμως είναι μετατοπισμένο σε σχέση με το πρώτο κατά γωνία θ' όπως αυτό φαίνεται από το κέντρο των ανοιγμάτων S_1, S_2 (ή από το κέντρο αντίστοιχα του φακού L λόγω της συμβολής μακρινού πεδίου).

Η διαφορά δρόμου μεταξύ των δύο μετώπων κύματος που προσπίπτουν στα M_1, M_2 θα είναι $d \sin\theta \simeq d \cdot \theta$ και επειδή $M_1M_3S_1 = M_2M_4S_2$, η διαφορά δρόμου μεταξύ των διαταραχών στο P από τα S_1, S_2 (που είναι $d' \sin\theta' \simeq d' \cdot \theta'$) θα είναι ίση με την $d \cdot \theta$. Δηλ. $d \cdot \theta = d' \cdot \theta'$. Οι δύο ανεξάρτητες κατανομές έντασης των κροσσών συμβολής θα συσχετίζονται μεταξύ τους με τελικό αποτέλεσμα την ελάττωση της φωτοαντίθεσης του συστήματος λόγω της προαναφερόμενης μετατόπισης. Μετατοπίζοντας όμως τα κάτοπτρα M_1, M_2 μπορούμε να πετύχουμε μια απόσταση d μεταξύ τους έτσι ώστε τα μέγιστα του ενός συστήματος κροσσών να συμπίπτουν με τα ελάχιστα του άλλου. Αυτό θα συμβεί όταν:

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \theta = \pi \tag{2.30}$$

οπότε και η φωτοαντίθεση των κροσσών θα μηδενιστεί. Η τελευταία σχέση μας δίνει: $\theta = \lambda/2d$ από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το γωνιακό άνοιγμα θ μεταξύ των δύο αστέρων. Πρέπει να σημειώσουμε ότι στη διάταξη του (Σχ. 2.9), τα ανοίγματα S_1, S_2 δεν είναι αναγκαστικά απαραίτητα επειδή ο συσχετισμός των διαταραχών μπορεί να γίνει και κατ' ευθείαν μέσω των κατόπτρων M_3, M_4.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Είναι γνωστό ότι διεύρυνση μιας φασματικής γραμμικής προκύπτει όχι μόνο λόγω των συγκρούσεων των ατόμων μεταξύ τους (απότομη διακοπή της εκπομπής) αλλά και από το γεγονός ότι το κάθε ατομικό δίπολο εκτελεί κατά κάποιο τρόπο αποσβενύμενη αρμονική ταλάντωση. Αν υποθέσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο αυτού του είδους των εκπεμπόμενων κυματοσυρμών εκφράζεται από τη σχέση:

$$f(t)=\begin{cases} a\, e^{-\pi\beta t}\cos 2\pi\nu_o t & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

όπου $\beta>0$ το μέτρο της απόσβεσης, τότε να υπολογιστεί το ενεργειακό φάσμα $E(\nu)$ αυτής της ακτινοβολίας. Η εκπομπή γίνεται στην κεντρική περιοχή του ορατού φάσματος για την οποία δεχόμαστε ότι: $\nu_0 \simeq 0.5\times 10^{15}\,\mathrm{Hz}$.

ΛΥΣΗ

Κατ' αρχή υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(t)$ ο οποίος δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}dt=\int_{0}^{\infty} ae^{-\pi\beta t}\cos(2\pi\nu_0 t)e^{-i2\pi\nu t}dt \quad \Rightarrow$$

$$F(\nu)=\frac{a}{2\pi}\left\{\frac{1}{\beta/2+i(\nu-\nu_0)}+\frac{1}{\beta/2+i(\nu+\nu_0)}\right\}$$

Επειδή η $f(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση, τότε το ενεργειακό της φάσμα θα δίνεται από τη σχέση:

$$E(\nu)=\left|2F(\nu)\right|^2$$

και θα πρέπει να συμπεριλάβουμε στους υπολογισμούς μας μόνο θετικές τιμές των συχνοτήτων ν. Επειδή επίσης $\nu_0 \simeq 0.5\times 10^{15}\,\mathrm{Hz}$, δηλ. πολύ μεγάλη τιμή, στα χρονικά όρια της απόσβεσης θα περιλαμβάνεται μεγάλος αριθμός περιόδων. Τότε ο δεύτερος όρος της $F(\nu)$ μπορεί ν' απαλειφθεί γιατί κατ'

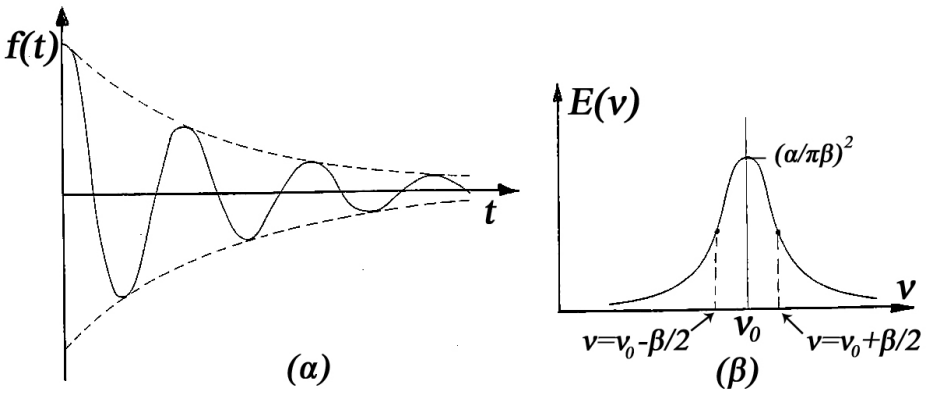
ελάχιστο επηρεάζει τον πρώτο όρο στην περιοχή των θετικών συχνοτήτων. Επομένως:

$$2F(\nu)=\frac{a}{\pi\beta}\left\{\frac{1}{1+i(\nu-\nu_0)/(\beta/2)}\right\}$$

και το ενεργειακό φάσμα θα δίνεται από τη σχέση:

$$E(\nu)=\left(\frac{a}{\pi\beta}\right)^2\left\{\frac{1}{1+\{(\nu-\nu_0)/(\beta/2)\}^2}\right\}$$

Οι γραφικές παραστάσεις του κυματοσυρμού $f(t)$ και του ενεργειακού του φάσματος $E(\nu)$ δίνονται στα (Σχ. 1.1). Για $\nu=\nu_0$ βρίσκουμε ότι θα είναι: $E(\nu)_{\nu=\nu_0}=(a/\pi\beta)^2$. Επομένως οι τιμές των ν που αντιστοιχούν κατά σύμβαση στο μισό αυτού του πλάτους υπολογίζονται από τη σχέση: $(1/2)E(\nu)_{\nu=\nu_0}=E(\nu)$ και θα είναι $\nu=\nu_0\pm\beta/2$. Άρα $\Delta\nu=\beta$. Δηλ. το εύρος των συχνοτήτων των κυματοσυρμών καθορίζεται από τον παράγοντα απόσβεσης β, εφόσον βέβαια δεν υφίστανται άλλες αιτίες διεύρυνσης των φασματικών γραμμών. Χωρίς μεγάλη αυστηρότητα, μπορούμε να πούμε (με δε-



(Σχ. 1.1)

δομένη την ισχύ της απροσδιοριστίας μεταξύ των $\Delta\nu$ και Δt, $\Delta\nu\cdot\Delta t\simeq 1$) ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή του β, τόσο μεγαλύτερο θα είναι και το ενεργό μήκος (χρονική διάρκεια Δt) των κυματοσυρμών άρα και η μονοχρωματικότητα της ακτινοβολίας. Όπως προσδιορίζεται πάντως πειραματικά, το

ποσοστό διεύρυνσης των γραμμών λόγω απόσβεσης, είναι μικρότερο του 1% σε σχέση με τη διεύρυνση που οφείλεται στις συγκρούσεις μεταξύ των ατόμων.

2. Να υπολογιστεί το ενεργειακό φάσμα $E(\nu)$ ενός αρμονικού κυματοσυρμού του οποίου η περιβάλλουσα είναι γκαουσιανής μορφής. Υποθέτουμε ότι η περιοχή του Η/Μ φάσματος στην οποία ανήκει, είναι η ορατή με $\nu_0 \simeq 0.5\times10^{15}\,\text{Hz}$.

ΛΥΣΗ

Ένας τέτοιος κυματοσυρμός μπορεί να περιγραφεί από τη συνάρτηση:

$$g(t) = e^{-\alpha t^2}\cos\omega_0 t$$

με $a>0,\ \ \omega_0 = 2\pi\nu$. Κατά τα γνωστά αν ω_0 ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ όπου $F(\omega)$ ο μετ. Fourier της $f(t)$ τότε:

$$\mathcal{F}\left\{f(t)e^{i\omega_0 t}\right\} = F(\omega-\omega_0)$$

και επειδή: $2\cos\omega_o t = e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}$ τότε:

$$\mathcal{F}\left\{f(t)\cos\omega_0 t\right\} = (1/2)\left[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)\right]$$

Για το λόγο αυτό θα υπολογίσουμε κατ' αρχή τον μετ. Fourier της συνάρτησης $f(t) = e^{-\alpha t^2}$ με $a>0$. Θα έχουμε:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t^2+i\omega t/a\right)}dt$$

Πολλαπλασιάζοντας την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση με την ποσότητα $e^{-\omega^2/4\alpha}\cdot e^{\omega^2/4\alpha} = 1$ βρίσκουμε τελικά:

$$F(\omega) = e^{-\omega^2/4\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{\sqrt{a}\left[t+i\omega/(2\alpha)\right]\right\}^2}dt$$

Αν θέσουμε $\sqrt{a}\left[t-i\omega/2a\right]=y$, τότε $\sqrt{a}dt=dy$ οπότε :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{\sqrt{a}\left[t+i\omega/(2\alpha)\right]\right\}^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

επειδή από τους πίνακες των ορισμένων ολοκληρωμάτων βρίσκουμε ότι:

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$. Οπότε: $F(\omega)=\mathcal{F}\left\{e^{-at^2}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/(4a)}$.

Επομένως: $$\mathcal{F}\left\{g(t)\right\}=\mathcal{F}\left\{e^{-at^2}\cos\omega_o t\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left\{e^{-\frac{-(\omega-\omega_o)^2}{4a^2}}+e^{-\frac{-(\omega+\omega_o)^2}{4a^2}}\right\}$$

ή $$F(\nu)=\mathcal{F}\left\{g(t)\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left\{e^{\frac{-\pi^2(\nu-\nu_o)^2}{a^2}}+e^{\frac{-\pi^2(\nu+\nu_o)^2}{a^2}}\right\}$$ όπου: $\omega=2\pi\nu$

Επειδή όμως η $g(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση, τότε το ενεργειακό της φάσμα θα δίνεται από τη σχέση:

$$E(\nu)=\left|2F(\nu)\right|^2$$

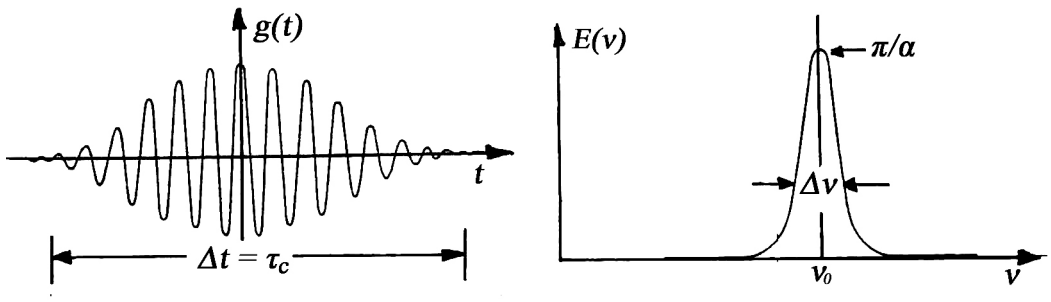
όπου θα πρέπει να συμπεριλάβουμε στους υπολογισμούς μας μόνο θετικές τιμές των συχνοτήτων ν. Επειδή επίσης $\nu_0 \simeq 0.5\times10^{15}$Hz τότε μέσα στα χρονικά όρια της απόσβεσης της γκαουσιανής κατανομής του κυματοσυρμού θα περιλαμβάνεται πολύ μεγάλος αριθμός περιόδων. Επομένως ο δεύτερος όρος της $E(\nu)$ μπορεί να παραλειφθεί επειδή κατ' ελάχιστο επηρεάζει τον πρώτο όρο στην περιοχή των θετικών συχνοτήτων. Άρα:

$$2F(\nu)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{-\pi^2(\nu-\nu_o)^2}{a^2}}$$

και το ενεργειακό φάσμα $E(\nu)$ του κυματοσυρμού θα δίνεται τελικά από τη σχέση:

$$E(\nu)=\left|2F(\nu)\right|^2=\frac{\pi}{a}e^{\frac{-2\pi^2(\nu-\nu_o)^2}{a^2}}$$

Οι γραφικές παραστάσεις του κυματοσυρμού $g(t)$ και του ενεργειακού φάσματος $E(\nu)$ δίνονται στα (Σχ. 2.1):



(Σχ. 2.1)

Για $\nu=\nu_0$ βρίσκουμε ότι $E(\nu)_{\nu=\nu_0}=\pi/a$. Επομένως οι τιμές των ν που αντιστοιχούν κατά σύμβαση στο $(1/e)$ αυτού του πλάτους υπολογίζονται από τη σχέση $(1/e)E(\nu)_{\nu=\nu_0}=E(\nu)$ και θα είναι $\nu=\nu_0\pm a/\sqrt{2}\pi$ Επομένως $\Delta\nu=\sqrt{2}\alpha/\pi$ Δηλ. το εύρος των συχνοτήτων των κυματοσυρμών με γκαουσιανή περιβάλλουσα καθορίζεται από τον παράγοντα a εφ' όσον βέβαια δεν υφίστανται άλλες αιτίες διεύρυνσης. Με όχι μεγάλη αυστηρότητα και εφόσον μας είναι γνωστή η σχέση απροσδιοριστίας $\Delta\nu\cdot\Delta t\simeq 1$ μπορούμε να πούμε ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή του a τόσο μεγαλύτερο θα είναι το μήκος (χρονική διάρκεια $\Delta t=\tau_c$) των κυματοσυρμών άρα και η μονοχρωματικότητα της ακτινοβολίας.

3. Δύο σύμφωνα γραμμικά πολωμένα επίπεδα μέτωπα κύματος φωτός της ίδιας συχνότητας ω και του ίδιου μ.κ. λ, της μορφής:

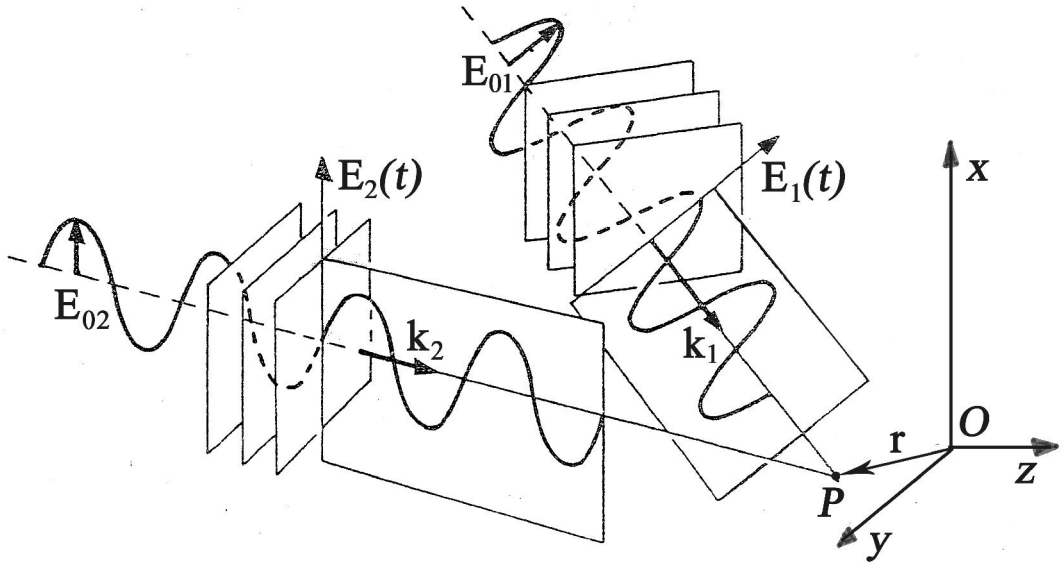
$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_{01}\cos(\omega t-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}+\phi_1),\quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_{02}\cos(\omega t-\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}+\phi_2),$$

διαδίδονται στο χώρο με κυματοδιανύσματα $\mathbf{k}_1=\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{l}_1$, $\mathbf{k}_2=\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{l}_2$, σε διαφορετικά επίπεδα πόλωσής. Κατά την πορεία τους, έρχονται σε επαλληλία στο επίπεδο x,y τρισορθογωνίου σ.σ. x,y,z ως προς το οποίο αναφέρονται

και τα $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$. $\mathbf{r}$ είναι ένα διάνυσμα θέσης από την αρχή O του συστήματος συντεταγμένων, σε ένα σημείο P του επιπέδου x, y. Να υπολογιστεί η κατανομή της έντασης του φωτός στο προαναφερόμενο επίπεδο.

ΛΥΣΗ

Όπως βλέπουμε στο επόμενο σχήμα, τα επίπεδα πόλωσης των κυμάτων καθορίζονται από τις διευθύνσεις των $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ και των αντίστοιχων πλατών $\mathbf{E}_{01}, \mathbf{E}_{02}$ των ηλεκτρικών τους πεδίων. Γνωρίζουμε επίσης ότι τα επί



(Σχ. 3.1)

μέρους πεδία στο επίπεδο x, y δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{01} \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi_1) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{02} \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \phi_2) \tag{3.2}$$

Επομένως το συνολικό πεδίο στο P θα δίνεται σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας από τη σχέση:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) \tag{3.3}$$

Και εφόσον οι διαταραχές είναι σύμφωνες, η κατανομή της έντασης στο επίπεδο x, y θα δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \langle |\varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}| \rangle = \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}^2 \rangle = \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle \tag{3.4}$$

Όπου: $\mathbf{S}$ το διάνυσμα Poynting και $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ το συνολικό πεδίο που δίνεται από τη (σχ. 3.3), με $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ να εκφράζει το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{E}$. Τότε από τη (σχ. 3.4) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle = \varepsilon_0 c \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \rangle = \\ &= \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \rangle + \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle + 2\varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle \end{aligned} \tag{3.5}$$

Όπου $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$ η μέση χρονική τιμή της συνάρτησης $f(t)$ και τ ο λεγόμενος χρόνος ανίχνευσης, που συνήθως λαμβάνεται μεγαλύτερος της περιόδου T της ταλάντωσης των πεδίων. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \rangle &= \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{01} \cos^2 (\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi_1) \rangle = \\ &= \varepsilon_0 c \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{01} \langle \cos^2 (\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi_1) \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_{01}^2 = I_1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

επειδή κατά τα γνωστά: $\langle \cos^2 (\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi_1) \rangle = 1/2$. Και με τον ίδιο τρόπο:

$$\varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_{02}^2 = I_2 \tag{3.7}$$

όπου I_1, I_2 οι εντάσεις του φωτός που συνεισφέρουν ανεξάρτητα τα δύο επίπεδα μετ. κύματος στο επίπεδο x, y.

Ο όρος $2\varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle$ της (σχ. 3.5) συνιστά – όπως θα δούμε στα επόμενα – τον όρο της συμβολής, ο οποίος διαφοροποιεί από σημείο σε σημείο το άθροισμα $I_1 + I_2$ των εντάσεων I_1, I_2 που το καθένα ξεχωριστά συνεισφέρουν τα δύο μετ. κύματος. Πράγματι θα έχουμε:
$2\varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = 2\varepsilon_0 c \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \langle \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi_1) \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \phi_2) \rangle$ και επειδή:
$\cos a \cos b = (1/2) \cos(a + b) + (1/2) \cos(a - b)$,

$$2\varepsilon_0 c\langle \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2\rangle = \varepsilon_0 c\mathbf{E}_{01}\cdot\mathbf{E}_{02}\left\langle\cos\left[2\omega t-(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}+(\phi_1+\phi_2)\right]\right\rangle + \\ +\varepsilon_0 c\mathbf{E}_{01}\cdot\mathbf{E}_{02}\left\langle\cos\left[(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}+(\phi_1-\phi_2)\right]\right\rangle.$$

Αλλά $\left\langle\cos\left[2\omega t-(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}+(\phi_1+\phi_2)\right]\right\rangle=0$ και $\left\langle\cos\left[(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}+(\phi_1-\phi_2)\right]\right\rangle=\cos\left[(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}+(\phi_1-\phi_2)\right]$. Επομένως:

$$I_{12}=2\varepsilon_0 c\langle \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2\rangle=\varepsilon_0 c\mathbf{E}_{01}\cdot\mathbf{E}_{02}\cos\left[(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}+(\phi_1-\phi_2)\right]. \tag{3.8}$$

Και αντικαθιστώντας τις (σχ. 3.6,7,8) στη (σχ. 3.5) βρίσκουμε:

$$I=I_1+I_2+I_{12}=\frac{\varepsilon_0 c}{2}E_{01}^2+\frac{\varepsilon_0 c}{2}E_{02}^2+\varepsilon_0 c\mathbf{E}_{01}\cdot\mathbf{E}_{02}\cos\left[(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}+(\phi_1-\phi_2)\right] \tag{3.9}$$

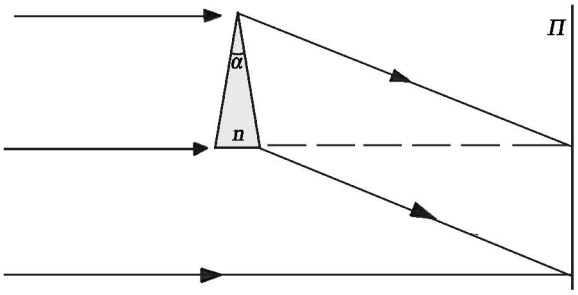
Και αν θέσουμε: $(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}+(\phi_1-\phi_2)=\delta$ (3.10)

$$I=I_1+I_2+I_{12}=\frac{\varepsilon_0 c}{2}E_{01}^2+\frac{\varepsilon_0 c}{2}E_{02}^2+\varepsilon_0 c\mathbf{E}_{01}\cdot\mathbf{E}_{02}\cos\delta \tag{3.11}$$

Από τη (σχ. 3.10) μπορούμε να δούμε ότι καθώς το $\mathbf{r}$ μεταβάλλεται πάνω στο επίπεδο x,y (ή γενικότερα στο χώρο), τότε και η διαφορά φάσης δ θα μεταβάλλεται όπως και ο παράγοντας συμβολής I_{12} (σχ. 3.8) και κατά προέκταση και η συνολική ένταση που δίνεται από τη (σχ. 3.11), αναδεικνύοντας αυξομειώσεις της έντασης δηλ. φαινόμενα συμβολής του φωτός. Ο όρος $(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}$ της (σχ. 3.10) αφορά τη χωρική διαφορά φάσης στο σημείο P (σε σχέση με το O) των δύο διαδιδόμενων μετώπων κύματος από τις πηγές τους στο P. Ο όρος $(\phi_1-\phi_2)$ της δ αφορά την αρχική διαφορά φάσης που οφείλεται στους εκπομπούς (δηλ. τις πηγές) η οποία αν είναι σταθερή στο χρόνο (όπως υποθέσαμε αρχικά), οι πηγές θα είναι σύμφωνες μεταξύ τους και θα έχουμε το αποτέλεσμα που μας δίνει η (σχ. 3.11).

Ένας άλλος παράγοντας που επηρεάζει τον όρο I_{12}, είναι οι διευθύνσεις των πεδίων $\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2$ και που δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{E}_{01}\cdot\mathbf{E}_{02}$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν τα ηλεκτρικά πεδία $\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2$ είναι ορθογώνια τότε $\mathbf{E}_{01}\cdot\mathbf{E}_{02}=0$ οπότε δεν θα υφίσταται φαινόμενο συμβολής, παρά το ότι τα δύο επίπεδα μέτωπα κύματος είναι σύμφωνα μεταξύ τους.

4. Να προσδιοριστεί το πρότυπο συμβολής πάνω στο πέτασμα (*Π*) της διάταξης του (Σχ. 4.1). Πρόκειται για τη σύμφωνη επαλληλία δύο επιπέδων μετ. κύματος τα οποία προκύπτουν ως εξής: Στην πορεία ενός αρχικού επίπεδου μετ. κύματος παρεμβάλλεται ένα λεπτό πρίσμα, το οποίο εκτρέπει τη δέσμη κατά το ήμισύ της, ενώ το άλλο της ήμισυ έχει τη διεύθυνση του αρχικού. Τα δύο σύμφωνα και ανεξάρτητα μεταξύ τους κύματα, έρχονται σε επαλληλία αναδεικνύοντας φαινόμενα συμβολής. Αν η διαθλαστική γω-

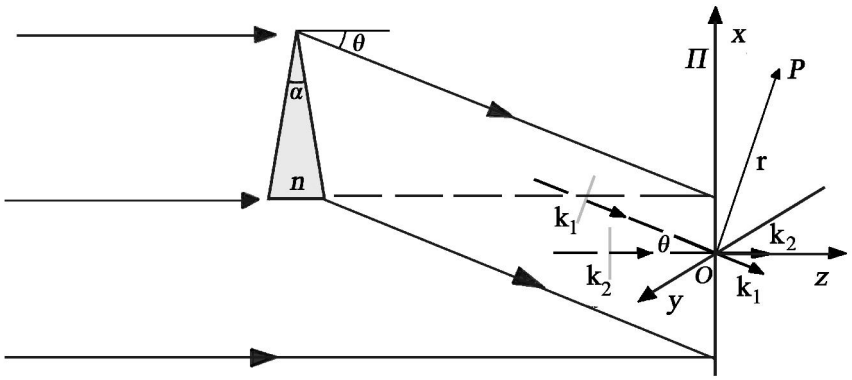


(Σχ. 4.1)

νία του πρίσματος είναι $a = 3^0$ $(0.05236\,\text{rad})$ και ο δ.δ. του πρίσματος $n = 1.52$, να προσδιοριστεί η περίοδος των κροσσών συμβολής. Το μ.κ. της φωτίζουσας δέσμης είναι $\lambda = 0.6328\,\mu\text{m}$ (Laser He-Ne).

ΛΥΣΗ

Το επίπεδο μετ. κύματος το οποίο προκύπτει από τη διάθλαση μέσω του πρίσματος, το χαρακτηρίζουμε με το κυματοδιάνυσμα $\mathbf{k}_1$. Ενώ το κατ' ευθεία με το $\mathbf{k}_2$, όπως αυτά φαίνονται στο (Σχ. 4.2). Ερχόμενα μεταξύ τους



(Σχ. 4.2)

σε επαλληλία στο πέτασμα (Π) σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία θ. Για την επίλυση του προβλήματος, θεωρούμε ένα τρισορθογώνιο σ.σ. x, y, z με τον z κατά τη διεύθυνση διάδοσης του αρχικού μετώπου και τους άξονες x, y πάνω στο πέτασμα (Π).

Αν P ένα τυχαίο σημείο πάνω στο επίπεδο x, y με διάνυσμα θέσης $\overline{OP} = \mathbf{r}$, τότε τα πεδία Ψ_1, Ψ_2 που αντιπροσωπεύουν τα δύο επίπεδα μετ. κύματος αντίστοιχα θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Psi_1 = Ae^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} \quad \text{και} \quad \Psi_2 = Ae^{i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})}$$

με A το πλάτος της διαταραχής , $\omega = 2\pi\nu$ την κυκλική συχνότητα και $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = k = 2\pi/\lambda$ το μέτρο των κυματοδιανυσμάτων. Όπου βέβαια:

$$\mathbf{k}_1 = k\cos\alpha\mathbf{i} + k\cos\beta\mathbf{j} + k\cos\gamma\mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{k}_2 = k\cos\alpha'\mathbf{i} + k\cos\beta'\mathbf{j} + k\cos\gamma'\mathbf{k}$$

και

$$\begin{array}{lll} \alpha = 90^0 + \theta & \beta = 90^0 & \gamma = \theta \\ \alpha' = 90^0 & \beta' = 90^0 & \gamma' = 0^0 \end{array}$$

Επομένως: $\mathbf{k}_1 = -k\sin\theta\mathbf{i} + k\cos\theta\mathbf{k}$ και $\mathbf{k}_2 = k\mathbf{k}$. Και επειδή: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ με $z = 0$ θα έχουμε τελικά:

$$\Psi_1 = Ae^{i(\omega t + kx\sin\theta)} \quad \text{και} \quad \Psi_2 = Ae^{i(\omega t)}$$

Και εφόσον οι διαταραχές Ψ_1, Ψ_2 είναι σύμφωνες μεταξύ τους, η κατανομή της έντασης του φωτός στο επίπεδο x, y θα δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$I \sim |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \Psi_1\Psi_2^* + \Psi_1^*\Psi_2$$

$|\Psi_1|^2 = A^2$, $|\Psi_2|^2 = A^2$, $\Psi_1\Psi_2^* = Ae^{i(\omega t) + ikx\sin\theta}Ae^{-i(\omega t)} \Rightarrow \Psi_1\Psi_2^* = A^2e^{ikx\sin\theta}$ και με τον ίδιο τρόπο $\Psi_1^*\Psi_2 = A^2e^{-ikx\sin\theta}$. Οπότε:

$$I = A^2 + A^2 + A^2e^{ikx\sin\theta} + A^2e^{-ikx\sin\theta} = 2A^2 + 2A^2\cos(kx\sin\theta) = 2A^2\left[1 + \cos(kx\sin\theta)\right]$$

Και τελικά: $I = 4A^2\cos^2\dfrac{kx\sin\theta}{2}$

Για την περίοδο $T = \Delta x$ των κροσσών συμβολής, από την τελευταία σχέση βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l} kx_1 \sin\theta = 0 \\ kx_2 \sin\theta = \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)\sin\theta = \pi$$

Οπότε: $x_2 - x_1 = \Delta x = \lambda/2\sin\theta$

όπου θ είναι η γωνία εκτροπής από το λεπτό πρίσμα, η οποία κατά τα γνωστά δίνεται από τη σχέση: $\theta \simeq (n-1)a$. Και επειδή λ, n, a είναι γνωστά, βρίσκουμε τελικά: $\Delta x = 0.011623\text{mm}$. Ο λόγος $f = 1/\Delta x$ μας δίνει τον αριθμό των περιόδων (κροσσών) ανά χιλιοστό και ονομάζεται ***χωρική συχνότητα***. Βρίσκουμε ότι είναι: $f \simeq 86\,\text{κροσσοί/mm}$. Και θα πρέπει εδώ να ειπωθεί ότι η τιμή της περιόδου των κροσσών συμβολής, είναι ανεξάρτητη της θέσης στην οποία βρίσκεται το πέτασμα, αρκεί να υπάρχει συσχέτιση των δύο δεσμών.

5. Στο (Σχ. 5.1) μπορούμε να δούμε τη διάδοση: α) Ενός επιπέδου μετ. κύματος κατά τα θετικά του άξονα των z τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων x, y, z και β) Ενός σφαιρικού αποκλίνοντος μετώπου, του οποίου η σημειακή πηγή βρίσκεται σε απόσταση $z = -L$ από την αρχή του O. Οι διαταραχές θεωρούνται της ίδιας συχνότητας και είναι μεταξύ τους σύμφωνες. Να υπολογιστεί η κατανομή της έντασής κατά την επαλληλία τους στο επίπεδο x, y.

ΛΥΣΗ

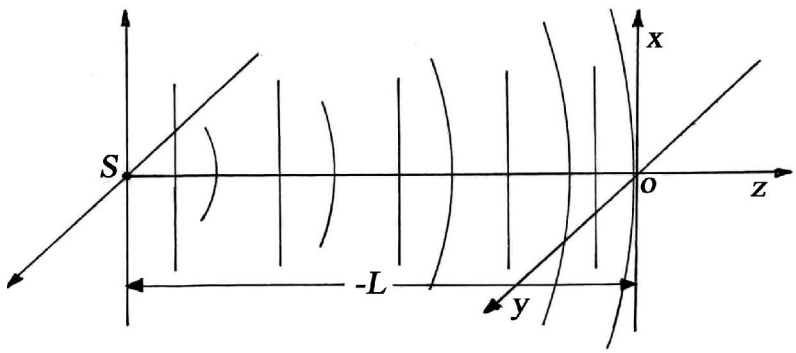
Στο (Κεφ. 1: Κύματα (Άσκ. 10 Λυμένη)), είχαμε υπολογίσει την κατανομή του πλάτους $\Psi(x, y)$ πάνω σ' ένα επίπεδο x, y ενός προσπίπτοντος αρμονικού επιπέδου μετ. κύματος, όταν αυτό διαδίδεται με γωνία θ σε σχέση με τον άξονα z. (Το κυματοδιάνυσμά του βρίσκεται πάνω στο επίπεδο x, z). Βρήκαμε ότι:

$$\Psi_1(x, y) = \Psi_1 = Ae^{ik\sin\theta x} \tag{5.1}$$

όπου A το πλάτος του και $k = 2\pi/\lambda$. Αν βέβαια το επίπεδο μετ. κύματος διαδίδεται κατά μήκος του άξονα z (δηλ. $\theta = 0$) και για λόγους απλότητας θεωρήσουμε ότι $A = 1$ (σταθερό μοναδιαίο πλάτος), τότε η (σχ. 5.1) θα πάρει τη μορφή:

$$\Psi_1(x,y) = \Psi_1 = 1 \tag{5.2}$$

Επίσης στο (Κεφ. 1: Κύματα (§ 1.8) – Παράδειγμα), είχαμε υπολογίσει την κατανομή του πλάτους $\Psi_2(x,y)$ ενός αποκλίνοντος σφαιρικού



(Σχ. 5.1)

μετώπου κύματος στο επίπεδο x,y τρισορθογωνίου σ.σ. x,y,z. Η σημειακή πηγή εκπομπής βρισκόταν στη θέση $z=-L$. Βρήκαμε (με την προϋπόθεση και εδώ το πλάτος του να είναι $A=1$) ότι:

$$\Psi_2(x,y) = \Psi_2 = e^{-i\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda L}} \tag{5.3}$$

Και εφόσον οι διαταραχές Ψ_1,Ψ_2 είναι σύμφωνες μεταξύ τους, η κατανομή της έντασης του φωτός στο επίπεδο x,y θα δίνεται από τη γνωστή σχέση:

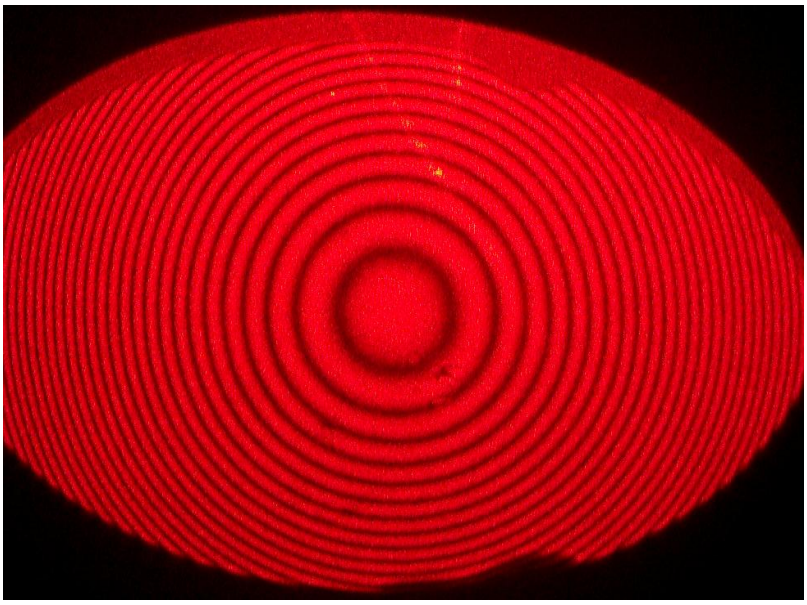
$$I \sim |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \Psi_1\Psi_2^* + \Psi_1^*\Psi_2 \tag{5.4}$$

Οπότε θα έχουμε: $|\Psi_1|^2 = 1$, $|\Psi_2|^2 = 1$, $\Psi_1\Psi_2^* = e^{\frac{i\pi(x^2+y^2)}{\lambda L}}$, $\Psi_1^*\Psi_2 = e^{\frac{-i\pi(x^2+y^2)}{\lambda L}}$. Και μετά την αντικατάστασή τους στη (σχ. 5.4) βρίσκουμε:

$I \sim 2 + e^{\frac{i\pi(x^2+y^2)}{\lambda L}} + e^{\frac{-i\pi(x^2+y^2)}{\lambda L}} = 2 + 2\cos\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda L}$. Και τελικά:

$$I \sim \cos^2\frac{\pi(x^2+y^2)}{2\lambda L} \tag{5.5}$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να δούμε ότι η κατανομή της έντασης των δύο διαταραχών (δηλ. το πρότυπο συμβολής τους), είναι κυκλικής συμμετρίας. Η (Εικ.



(Εικ. 5.2)

5.2) μας δείχνει με εύλογο τρόπο αυτό το αποτέλεσμα και είναι παρμένη με φως από Laser He-Ne μ. κ. $\lambda = 632.8\text{nm}$. Το πρότυπο αυτό ονομάζεται Gabor zone plate προς τιμή του D.Gabor εφευρέτη της Ολογραφίας, (βλ. Κεφ.7: Περίθλαση του φωτός (ΘΕΜΑ 2)).

6. Δύο σύμφωνες σημειακές πηγές S_1, S_2 (Σχ. 6.1α), εκπέμπουν στο χώρο αρμονικά σφαιρικά μετ. κύματος μ.κ. λ. Η απόσταση τους είναι $d = \lambda/2$ και η διαφορά φάσης μεταξύ των πηγών κατά την διάρκεια της εκπομπής $\phi_1 - \phi_2 = \pi$. Επίσης έχουν τις ίδιες εντάσεις $I_1 = I_2 = I_0$. Να προσδιοριστεί το πολικό διάγραμμα της κατανομής της έντασης $I(\theta)$ σ' ένα επίπεδο που περιλαμβάνει τις δύο πηγές, στην προσέγγιση του μακρινού πεδίου, δηλ. σε απόσταση αρκετά μεγάλη από αυτές. Ποιες είναι οι αριθμητικές τιμές των $I(0^0), I(30^0), I(90^0)$.

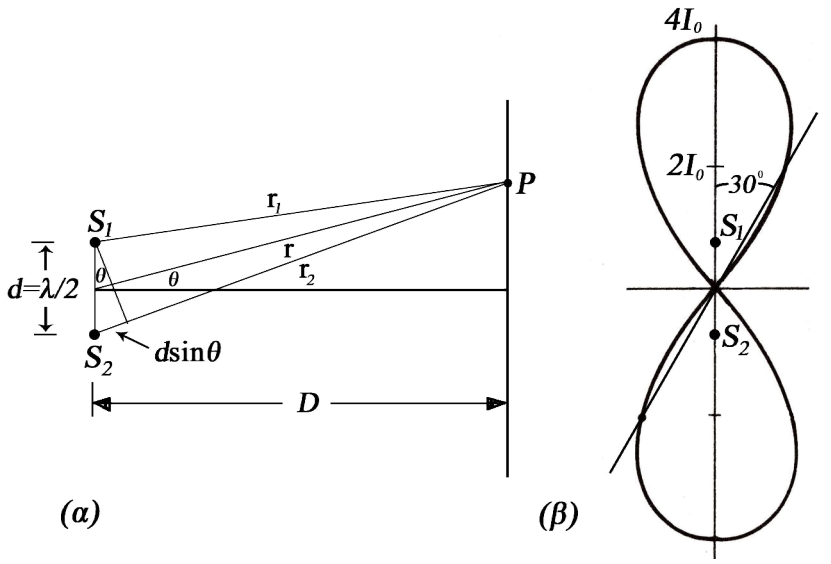
ΛΥΣΗ

Από τη γνωστή (σχ. 6.4.1.10): $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left[k(r_2 - r_1) + (\phi_1 - \phi_2)\right]$ που αφορά το αποτέλεσμα τις συμβολής δύο σφαιρικών μετ. κύματος, για $I_1 = I_2 = I_0$, $\phi_1 - \phi_2 = \pi$ και $k(r_2 - r_1) \simeq kd\sin\theta$ βρίσκουμε:

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{6.1}$$

όπου $\delta = kd\sin\theta + \pi$. Και επειδή: $k = 2\pi/\lambda$ όπως και $2d = \lambda \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2}(1+\sin\theta)$. Οπότε η (σχ. 6.1) γίνεται:

$$I = 4I_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right) \tag{6.2}$$



(Σχ. 6.1)

Η γραφική παράσταση της $I(\theta)$ από τη (σχ. 6.2) μας δίνει το ζητούμενο πολικό διάγραμμα του (Σχ. 6.1β). Τελικά βρίσκουμε: $I(0^0) = 0, I(30^0) = 2I_0, I(90^0) = 4I_0$.

7. Οι δακτύλιοι του Newton (κροσσοί ίσου πάχους-Fizeau) διακρίνονται από τους επίσης κυκλικής συμμετρίας κροσσούς Haidinger (κροσσοί ίσης κλίσης) από τη σειρά με την οποία αναπτύσσονται σε σχέση με την τάξη τους m από το κέντρο του προτύπου συμβολής προς την περιφέρειά του. Ν' αποδειχθεί ότι το κέντρο του προτύπου των κροσσών Haidinger αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή του m ενώ το αντίθετο συμβαίνει για το πρότυπο των δακτυλίων Newton.

ΛΥΣΗ

α) ***Κροσσοί Haidinger (ίσης κλίσης)***

Η συνθήκη σχηματισμού των ελαχίστων για τους κροσσούς ίσης κλίσης δίνεται από τη (σχ. 6.5.1.4): $\delta = \frac{4\pi n_f}{\lambda_o} d\cos\theta_t - \pi$ για $\delta = (2m-1)\pi \quad m = 0,1,2,...$

Οπότε min: $d\cos\theta_t = 2m\,\lambda_f/4$ ή $4n_f d\cos\theta_t = 2m\lambda_0$ δεδομένου ότι: $n_f = \lambda_0/\lambda_f$. Και λύνοντας ως προς m:

$$\frac{2n_f d\cos\theta_t}{\lambda_0} = m \quad m = 0,1,2,... \tag{7.1}$$

όπου d το πάχος του πλακιδίου, λ_0 το μ.κ. στο ελεύθερο χώρο, θ_t η γωνία διάθλασης που αντιστοιχεί στον κροσσό τάξης m και n_f ο δ.δ. του πλακιδίου.

Υποθέτουμε ότι στη γωνία θ_t' αντιστοιχεί ελάχιστο τάξης m' και στην θ_t τάξης m. Έστω επίσης ότι $\theta_t' > \theta_t$. Τότε: $\cos\theta_t' < \cos\theta_t$ και από τη (σχ. 7.1) θα έχουμε: $\frac{2dn_f\cos\theta_t'}{\lambda_o} = m'$ και $\frac{2dn_f\cos\theta_t}{\lambda_o} = m$. Οπότε:

$$m' - m = \frac{2dn_f}{\lambda_0}\left(\cos_t' - \cos\theta_t\right) \tag{7.2}$$

Είναι: $\left(2dn_f/\lambda_0\right) > 0$ και επειδή $\cos_t' - \cos\theta_t < 0$ θα έχουμε τελικά:

$$m' < m \tag{7.3}$$

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι κροσσοί που σχηματίζονται διαδοχικά αποκρινόμενοι από το κέντρο του προτύπου συμβολής ανήκουν σε όλο και μικρότερη τάξη. Άρα ο σχηματιζόμενος στο κέντρο όπου $\theta_t = 0^0$, θα έχει τη μέγιστη τάξη $m = m_{\max}$. Τότε από τη (σχ. 7.1) για $\theta_t = 0$ βρίσκουμε:

$$m_{\max} = \frac{2dn_f}{\lambda_o} \tag{7.4}$$

Το γεγονός φυσικά θα οφείλεται στο ότι ο κεντρικός κροσσός του συστήματος των δακτυλίων, προκύπτει από τη συμβολή διαταραχών (από την πάνω και την κάτω επιφάνεια του πλακιδίου) που είναι κάθετες $\left(\theta_t = 0^0\right)$ σ' αυτό. Πράγματι επειδή η διαφορά του οπτικού δρόμου L μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση $L = 2n_f d\cos\theta_t$, ο

L θα είναι μέγιστος όταν $\theta_t = 0^0$. Επομένως οι δύο διαταραχές συμβάλλουν με τη μέγιστη διαφορά οπτικού δρόμου άρα και ο σχηματιζόμενος στη θέση αυτή κροσσός συμβολής θ' αντιστοιχεί στη μέγιστη τάξη m. Θα πρόκειται βέβαια για το τάξης $m_{\max}$ ελάχιστο (εφόσον $m_{\max}$ ακέραιος) λόγο της επιπλέον διαφοράς φάσης των 180^0 από τις ανακλάσεις των διαταραχών στην πάνω (αραιότερο-πυκνότερο) και στην κάτω: (πυκνότερο-αραιότερο) επιφάνειες του πλακιδίου δ.δ. $n_f > 1.0$.

Παράδειγμα

Ποια είναι η τιμή του τάξης m κεντρικού κροσσού του προτύπου συμβολής των κροσσών Haidinger που σχηματίζονται μέσω ενός πλακιδίου πάχους $d = 2\text{mm}$, $n_f = 1.5$ και $\lambda_0 = 600\text{nm}$. Πρόκειται για μέγιστο ή ελάχιστο;

- Θα πρέπει εφαρμόζοντας τα αριθμητικά δεδομένα στους τύπους των μεγίστων και ελαχίστων να βρεθεί τιμή m που αντιστοιχεί σε ακέραιο κατ' αρχή αριθμό. Η δοκιμή μας δείχνει ότι: $m = 2dn_f / \lambda_o = 10000$. Επομένως ο κεντρικός κροσσός είναι τάξης $m = 10^4$ και αντιστοιχεί σε ελάχιστο έντασης.

β) ***Κροσσοί Fizeau (δακτύλιοι Newton) ίσου πάχους***

Είναι γνωστό ότι οι κροσσοί ίσου πάχους που προκύπτουν από τη διάταξη Newton – όταν αυτή φωτιστεί με σχεδόν κάθετο φωτισμό – ονομάζονται κροσσοί Fezeau. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση $\left(\theta_t = 0^0\right)$ αποδεικνύεται (σχ. 6.5.2.9), ότι η ακτίνα x_m του τάξης m σκοτεινού δακτυλίου δίνεται από τη σχέση: $x_m^2 = m\lambda_f R$ όπου λ_f το μ.κ. στο εσωτερικό της σφήνας $\left(\lambda_0 = n_f \lambda_f\right)$ και R ακτίνα καμπυλότητας του φακού. Για έναν άλλο δακτύλιο ακτίνας x'_m που αντιστοιχεί πάλι σε σκοτεινό κροσσό για τον οποίο $x'_m > x_m$ θα ισχύει μια παρόμοια σχέση: $x'^2_m = m'\lambda_f R$. Τότε $m' - m = \left(x'^2_m - x_m^2\right) / \lambda_f R$ όπου $\lambda_f R > 0$. Και επειδή $x'^2_m - x_m^2 > 0 \Rightarrow m' - m > 0$ οπότε: $m' > m$.

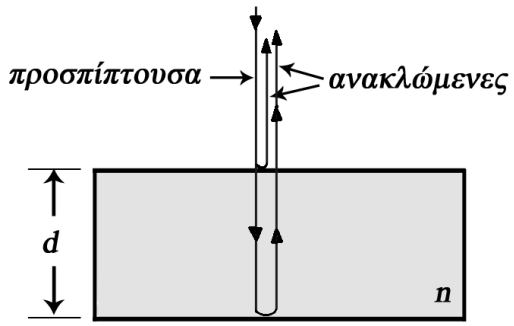
Η τελευταία μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι κροσσοί κυκλικής συμμετρίας που σχηματίζονται διαδοχικά απομακρινόμενοι από το κέντρο του προτύπου συμβολής (για το οποίο $\theta_i = \theta_f \simeq 0^0$) ανήκουν σε όλο και μεγαλύτερη τάξη m. Το γεγονός σημαίνει ότι στη διάταξη του Newton εφόσον φακός και επίπεδο είναι οπτικά τέλεια και δεν υπάρχει κανένα εμπόδιο στο σημείο επαφής τους θα έχουμε το σχηματισμό του $m = 0$ τάξης ελαχίστου (σκοτεινού κροσσού). Το γεγονός θα οφείλεται στο ότι για το κέντρο του συστήματος των δακτυλίων, το πάχος της σφήνας φακού-επιπέδου είναι μηδέν, οπότε μηδέν θα είναι και η διαφορά των οπτικών δρόμων των δύο συμβαλλουσών διαταραχών. Άρα και η τάξη αυτού του κροσσού θα

είναι $m = 0$. Το ελάχιστο προκύπτει κατά τα γνωστά στην επί πλέον διαφορά φάσης κατά 180^0 λόγω ανάκλασης της μιας των διαταραχών από οπτικά αραιότερο μέσο σε οπτικά πυκνότερο.

8. Λεπτό υμένιο πάχους $d = 0.4\mu\text{m}$ φωτίζεται κάθετα από λευκό φως φασματικού εύρους $0.4 - 0.7\mu\text{m}$. Ο δ.δ. του υμενίου είναι $n = 1.5$. Ποιο από τα μ.κ. του λευκού φωτός θα εισχυθεί κατά την ανάκλαση;

ΛΥΣΗ

Όπως φαίνεται από το (Σχ. 8.1) η διαφορά των οπτικών δρόμων των δύο διαταραχών που προέρχονται από την ανάκλαση στην πάνω και στην κάτω επιφάνεια



(Σχ. 8.1)

του λεπτού υμενίου θα είναι: $L = 2dn + \lambda/2$, όπου λ το μ.κ. της συγκεκριμένης ακτινοβολίας. Και προκειμένου να έχουμε μέγιστο συμβολής (εποικοδομητική συμβολή), για να είναι ορατή μέσω του ματιού μας και να μην δίνουν μηδενικό ελάχιστο αναστελλόμενες) θα πρέπει να ισχύει:

$$2dn + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{4dn}{2m-1} \tag{8.1}$$

Και επειδή: $0.4 < \lambda < 0.7 \;\Rightarrow\; 0.4 < \dfrac{4dn}{2m-1} < 0.7 \;\Rightarrow\; 2.1 < m < 3.5$. Δεδομένου όμως ότι $m \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; m = 3$. Οπότε από τη (σχ. 8.1) για $m = 3$ βρίσκουμε: $\lambda = 0.48\mu\text{m}$. Που σημαίνει ότι η απόχρωση που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής βλέποντας πάνω από το υμένιο είναι στην περιοχή του μπλε (βλ. Κεφ. 4: Διασκεδασμός του φωτός (Πίν. 4.3.2.3)).

Για την περίπτωση που στη (σχ. 8.1): $2dn+\frac{\lambda}{2}=m\lambda$ αντί του $+\lambda/2$ (πρόσθετη διαφορά φάσης π λόγω ανάκλασης της διαταραχής στην πάνω επιφάνεια, από οπτικά αραιότερο μέσο σε οπτικά πυκνότερο), λάβουμε το $-\lambda/2$ τότε θα έχουμε:

$$2dn-\frac{\lambda}{2}=m\lambda \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{4dn}{2m+1} \tag{8.2}$$

Και επειδή $0.4<\lambda<0.7 \;\Rightarrow\; 0.4<\frac{4dn}{2m+1}<0.7 \;\Rightarrow\; 1.2<m<2.5$. Δεδομένου όμως ότι $m\in\mathbb{Z} \;\Rightarrow\; m=2$. Οπότε από τη (σχ. 8.2) για $m=2$ βρίσκουμε και πάλι: $\lambda=0.48\mu\text{m}$. Που σημαίνει ότι η λήψη του πρόσθετου οπτικού δρόμου λόγω ανάκλασης από οπτικά αραιότερο μέσο σε οπτικά πυκνότερο κατά $+\lambda/2$ ή $-\lambda/2$ δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα.

9. α) Να προσδιοριστούν οι θέσεις σχηματισμού των φωτεινών και των σκοτεινών δακτυλίων του Newton, για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες η σφήνα δημιουργείται από συνδυασμό δύο φακών σε επαφή: (I) κυρτού – κοίλου και (II) κυρτού – κυρτού, με διαφορετικές ακτίνες καμπυλότητας. β) Με μετρήσεις των διαμέτρων των δακτυλίων να υπολογιστεί το μ.κ. της φωτίζουσας πηγής. Αν κατόπιν ο μεταξύ της σφήνας χώρος πληρωθεί από υγρό, να υπολογιστεί ο δείκτης διάθλασης του.

ΛΥΣΗ

α) Θα πρέπει κατ' αρχή να υπολογίσουμε για τις δύο περιπτώσεις (I) και (II) το πάχος d_m της σφήνας σε απόσταση x_m από το σημείο επαφής των φακών όπου και σχηματίζεται ο m τάξης φωτεινός ή σκοτεινός κροσσός. Με τη βοήθεια των (Σχ. 9. 1α, β) θα έχουμε:

(I) Για την περίπτωση κοίλος – κυρτός: $d_m=d_{AA'}-d_{BA'}$ αλλά:

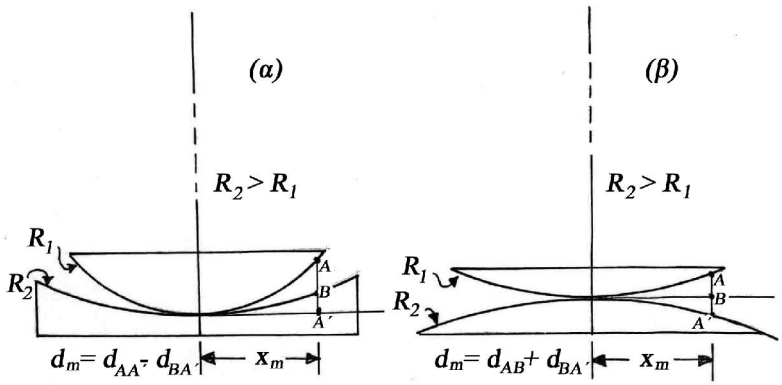
$$x_m^2=2R_1d_{AA'} \quad \text{και} \quad x_m^2=2R_2d_{BA'}. \text{ Οπότε: } d_m=\frac{x_m^2}{2R_1}-\frac{x_m^2}{2R_2}=\frac{x_m^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

(II) Για την περίπτωση κυρτός – κυρτός: $d_m=d_{AB}+d_{BA'}$ αλλά:

$$x_m^2=2R_1d_{AB} \quad \text{και} \quad x_m^2=2R_2d_{BA'}. \text{ Οπότε: } d_m=\frac{x_m^2}{2R_1}+\frac{x_m^2}{2R_2}=\frac{x_m^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

Στην γενικότερη λοιπόν περίπτωση:

$$d_m = \frac{x_m^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2}\right) = \frac{x_m^2}{2}\frac{(R_2 \pm R_1)}{R_1 R_2} \tag{9.1}$$



(Σχ. 9. 1)

Μας είναι γνωστό όμως ότι οι συνθήκες σχηματισμού φωτεινών – σκοτεινών κροσσών στη διάταξη Newton για σχεδόν κάθετο φωτισμό δίνονται από τις (σχ. 6.5.2.7):

$$\left.\begin{array}{ll} \max: & 2d_m n_f = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_o \\ \min: & 2d_m n_f = m\lambda_o \end{array}\right\} \quad m = 0,1,2,... \tag{9.2}$$

όπου n_f ο δ.δ. της σφήνας και λ_o το μ.κ. του φωτός στο κενό. Αν επίσης θεωρήσουμε ότι $D_m = 2x_m$ είναι η διάμετρος των κροσσών τότε από τις (σχ. 9.1,2) βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{ll} \max: & D_m^2 = \dfrac{2RR_2(2m+1)\lambda_o}{n_f(R_2 \pm R_1)} \\ \min: & D_m^2 = \dfrac{4R_1R_2m\lambda_o}{n_f(R_2 \pm R_1)} \end{array}\right\} \quad m = 0,1,2,... \tag{9.3}$$

β) Για τον υπολογισμό του μ.κ. λ_o και του δ.δ. n_f έστω ότι οι μετρήσεις γίνονται με τη βοήθεια των σκοτεινών δακτυλίων. Τότε από τη (σχ. 9.3) το τετράγωνο της διαμέτρου του $(m+p)$ σκοτεινού δακτυλίου θα είναι:

$$D_{m+p}^2 = \frac{4R_1R_2(m+p)\lambda_o}{n_f(R_2 \pm R_1)} \tag{9.4}$$

Επομένως: $$D_{m+p}^2 - D_m^2 = \frac{4p\lambda_0 R_1 R_2}{n_f\left(R_2 \pm R_1\right)} \tag{9.5}$$

Έστω ότι ο ενδιάμεσος χώρος της σφήνας είναι από αέρα ($n_f = 1$).
Τότε από τη (σχ. 9.5) θα έχουμε:

$$\lambda_o = \frac{\left(D_{m+p}^2 - D_m^2\right)\left(R_2 \pm R_1\right)}{4pR_1R_2} \tag{9.6}$$

Αν η σφήνα πληρούται διαδοχικά από αέρα και υγρό δ.δ. n_f τότε από τη (σχ. 9.5) θα έχουμε:

α) Για τον αέρα:

$$\left(D_{m+p}^2 - D_m^2\right)_A = \frac{4p\lambda_o R_1 R_2}{R_2 \pm R_1} \tag{9.7}$$

β) Για το υγρό:

$$\left(D_{m+p}^2 - D_m^2\right)_Y = \frac{4p\lambda_o R_1 R_2}{n_f\left(R_2 \pm R_1\right)} \tag{9.8}$$

Αν διαιρέσουμε μεταξύ τους τις (σχ. 9.7,8) βρίσκουμε:

$$n_f = \frac{\left(D_{m+p}^2 - D_m^2\right)_A}{\left(D_{m+p}^2 - D_m^2\right)_Y} \tag{9.9}$$

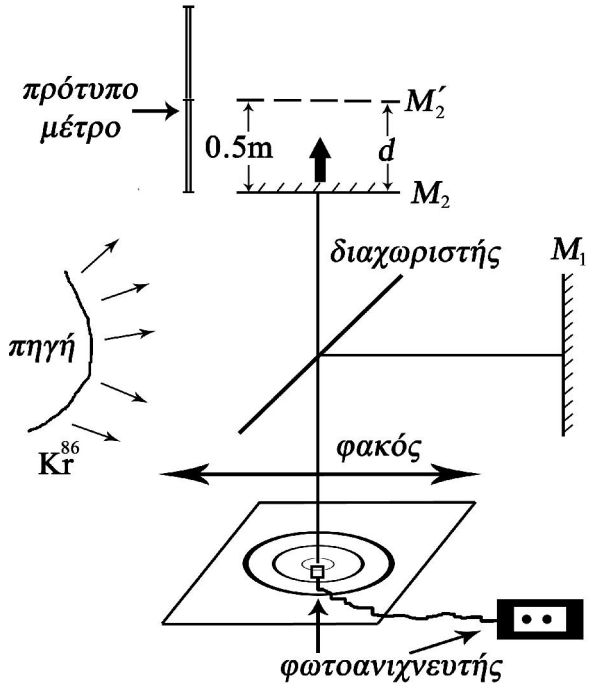
Γνωρίζουμε ότι για τους δακτυλίους του Newton το κέντρο του προτύπου συμβολής καταλαμβάνεται από τον μηδενικής τάξης σκοτεινό κροσσό για τον οποίο $D_0 = 0$ (για τον αέρα και το υγρό). Επομένως με μετρήσεις της διαμέτρου D_p του $p-$τάξης σκοτεινού κροσσού για τον αέρα και το υγρό αντίστοιχα, μας επιτρέπεται ο υπολογισμός του δ.δ. n_f από τη (σχ. 9.9) καθώς και του μ.κ. λ_0 από τη (σχ. 9.6).

10. Το έτος 1960 ξαναορίστηκε το πρότυπο μέτρο (1m), στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI). Σαν βάση χρησιμοποιήθηκε η 'κοκκινο-πορτοκαλί' ακτινοβολία της φασματικής γραμμής του στοιχείου Kr^{86}, η οποία στο κενό έχει μήκος κύματος $\lambda_0 = 605.7802105\text{nm}$. Τη μέτρηση αυτή μπορούμε να την κάνουμε σ' ένα συμβολό-

μετρο Michelson, μετατοπίζοντας το ένα κάτοπτρο κατά 0.5m και μετρώντας τον αριθμό των κροσσών (φωτεινών ή σκοτεινών) που περνάνε από ένα σημείο του προτύπου συμβολής, στο οποίο έχουμε τοποθετήσει ένα φωτοανιχνευτή. Πόσα ακριβώς μ.κ. θα καταγράψει ο φωτοανιχνευτής; Η φωτίζουσα το συμβολόμετρο πηγή είναι εκτεταμένη.

ΛΥΣΗ

Με τα κάτοπτρα M_1, M_2 του συμβολόμετρου Michelson σε ορθογώνια διάταξη (Σχ. 10.1) και το φωτισμό του από εκτεταμένη πηγή, οι σχηματιζόμενοι κροσ-



(Σχ. 10.1)

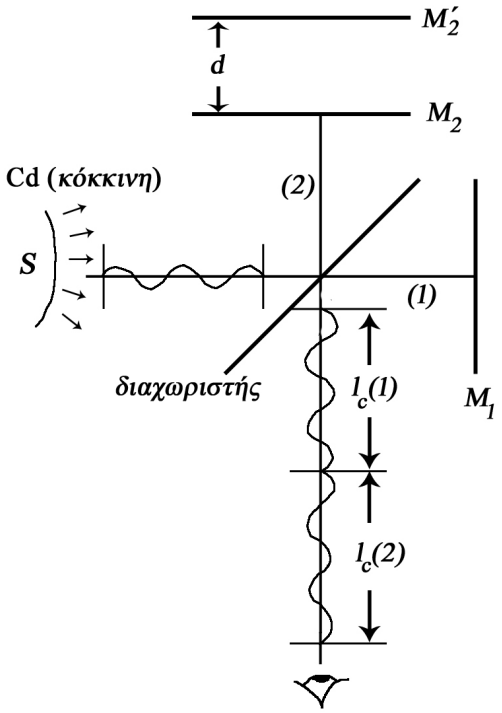
σοί είναι κροσσοί Haidinger κυκλικής συμμετρίας (κροσσοί ίσης κλίσης). Και με το δεδομένο ότι οι συσχετιζόμενες διαταραχές στην έξοδο του συμβολόμετρου είναι παράλληλες μεταξύ τους, με τη βοήθεια ενός θετικού φακού μπορούμε ν' απεικονίσουμε το πρότυπο συμβολής στο εστιακό του επίπεδο. Τη φωτοευαίσθητη κεφαλή του ανιχνευτή την τοποθετούμε ακριβώς στο κέντρο του προτύπου και εκκινούμε τη μέτρηση με ένα μέγιστο συμβολής, όπου το κινούμενο κάτοπτρο βρίσκεται στη θέση M_2 (όχι απαραίτητα σε συμμετρική θέση σε σχέση με το ακίνητο M_1 ως προς τον διαχωριστή). Η θέση M_2 είναι η αρχή του προτύπου μέτρου. Κατόπιν μετακινούμε το κάτοπτρο M_2 μέχρι τη θέση M_2', που αντιστοιχεί στο ήμισυ του προτύπου

μέτρου (δηλ. στα 0.5m) . Έστω τώρα ότι $d\left(=0.5\text{m}\right)$ είναι η μετακίνηση του κινητού κατόπτρου από τη θέση M_2 στη θέση M_2'. Στη θέση M_2 του μεγίστου, αντιστοιχεί τάξη κροσσού m_1 ενώ στη θέση M_2' τάξη m_2. Όπου $N = m_2 - m_1$ το ακέραιο πολλαπλάσιο (;) του αριθμού των διελεύσεων φωτεινών κροσσών που θα καταγράψει το σύστημα του φωτοανιχνευτή. Τότε θα ισχύει η σχέση:

$$2d = N\lambda_0 \tag{10.1}$$

Και με δεδομένα ότι: $2d = 1\text{m} = 10^6\,\mu\text{m}$ και $\lambda_0 = 605.7802105\text{nm}$, βρίσκουμε τελικά ότι: $N = 1.650.763,718$. Επομένως το πρότυπο μέτρο (που κατά τα γνωστά φυλάγεται στο προάστιο του Παρισιού Sevres), αντιστοιχεί σε $N = 1.650.763,718$ μ.κ. της φασματικής γραμμής του στοιχείου Kr^{86} (μ.κ. $\lambda_0 = 605.7802105\text{nm}$).

11. Ένα συμβολόμετρο Michelson φωτίζεται με φως από την κόκκινη γραμμή που εκπέμπει η λυχνία του Cd της οποίας $\lambda_0 = 643.847\text{nm}$, με το φασματικό της εύ-



(Σχ. 11.1)

ρος να είναι $\Delta\lambda_0 = 0.0013\text{nm}$ (βλ. (Πίν. 6.1.2.11)). Η αρχική διευθέτηση του συμβολόμετρου (με τα κάτοπτρα M_1, M_2 κάθετα μεταξύ τους) είναι αυτή για την οποία

$d = 0$ (Σχ. 11.1). Που σημαίνει ότι με το μάτι μας τοποθετημένο στην έξοδο του συμβολόμετρου, βλέπουμε τους κυκλικούς κροσσούς Hidinger (προσαρμογή του ματιού σε άπειρη απόσταση). Μετακινούμε τότε το κάτοπτρο M_2 (μέχρι τη θέση M_2') και παρατηρώντας βλέπουμε ότι οι κροσσοί εξαφανίζονται. Να βρεθεί: α) Κατά πόσο μετακινήθηκε το κάτοπτρο και β) Σε πόσα μ.κ. η αντιστοιχεί αυτή η μετακίνηση.

ΛΥΣΗ

α) Η εξαφάνιση των κροσσών από το πεδίο του συμβολόμετρου σημαίνει ότι οι αντίστοιχοι κυματοσυρμοί, οι οποίοι προέκυψαν από το διαχωρισμό κατά πλάτος ενός προσπίπτοντος στο διαχωριστή δέσμης και διάνυσαν τους κλάδους (1) και (2) του συμβολόμετρου, κατά την έξοδό τους μόλις αποσυσχετίστηκαν. Για $d = 0$ κατά τα γνωστά έχουμε πλήρη συσχετισμό, δηλ. ταύτιση των κυματοσυρμών. Επομένως θα έχουμε: $2d = l_c$ όπου l_c το μήκος συμφωνίας του φωτός με το οποίο φωτίζεται το συμβολόμετρο. Αλλά κατά τα γνωστά (σχ. 6.1.2.22): $l_c = \lambda_0^2 / \Delta\lambda_0$. Οπότε: $d = \lambda_0^2 / 2(\Delta\lambda_0) = (643.847)^2 / (2 \times 0.0013) = 159.43\text{mm}$.

β) $N = \dfrac{d}{\lambda_0} = \dfrac{159.43}{0.643847 \times 10^{-3}} \Rightarrow N \simeq 24 \times 10^4$ μήκη κύματος.

12. Θέλουμε να εκτελέσουμε το πείραμα συμβολής του Young με φωτίζουσα πηγή που εκπέμπει: α) ψευδομονοχρωματική ακτινοβολία (πράσινη γραμμή της φασματικής λυχνίας Hg με $\lambda = 546.1\text{nm}$ και $\Delta\lambda = 1\text{nm}$) και β) Λευκό φως από πηγή αλογόνου (με $\lambda = \bar{\lambda} = 550\text{nm}$ και $\Delta\lambda = 300\text{nm}$). Η απόσταση μεταξύ των δύο κυκλικών ανοιγμάτων είναι $d = 1\text{mm}$ και η διάμετρός τους $2R = 0.25\text{mm}$:

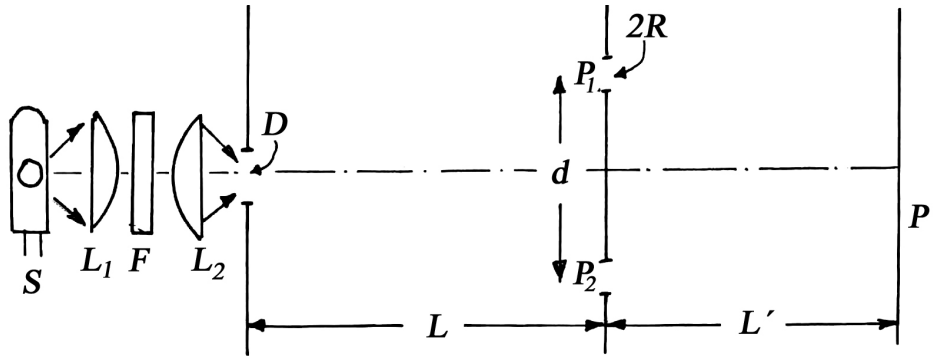
Ι) Αν η φωτίζουσα πηγή έχει διάμετρο $D = 1\text{mm}$, να υπολογιστεί κατ' αρχή η απόσταση L από τα δύο κυκλικά ανοίγματα έτσι ώστε αυτά να βρίσκονται σε περιοχή μεγάλου βαθμού χωρικής συμφωνίας.

ΙΙ) Να υπολογιστεί ο μέγιστος αριθμός των κροσσών που σχηματίζονται σε πέτασμα που απέχει απόσταση L' από τα ανοίγματα και που πληροί τις συνθήκες συμβολής μακρινού πεδίου με βάση το μήκος συμφωνίας των κυματοσυρμών των εκπεμπόμενων από κάθε πηγή.

ΙΙΙ) Τι θα συμβεί εάν λάβουμε υπόψη μας φαινόμενα περίθλασης λόγω των πεπερασμένων διαστάσεων των δύο κυκλικών ανοιγμάτων;

ΛΥΣΗ

Κατ' αρχή, οι δύο εναλλακτικές διατάξεις με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να εκτελέσουμε το πείραμα φαίνονται στα (Σχ. 12.1,2) και είναι διατάξεις διαίρεσης μετώπου κύματος (§ 6.3.1). Το σύστημα φωτισμού του κυκλικού ανοίγματος διαμέτρου D συνίσταται: α) Από την πηγή S (φασματική λυχνία Hg ή λυχνία αλογόνου λευκού φωτός). β) Το σύστημα των φακών L_1, L_2 το οποίο συνιστά ένα συμπυκνωτή φακό, που συγκεντρώνει το φως στο κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου D και γ) Για την περίπτωση του φωτισμού με τη φασματική λυχνία, μεταξύ των φακών παρεμβάλλεται το συμβολομετρικό φίλτρο F, προκειμένου να επιτρέψει τη διέλευση μόνο της πράσινης γραμμής του Hg.



(Σχ. 12.1)

Εφόσον δεν χρησιμοποιούμε φακούς, η διάταξη είναι αυτή του (Σχ. 12.1). Δηλ. το κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου D φωτίζει απ' ευθείας σαν 'σημειακή' πηγή από συμμετρική θέση τα δύο κυκλικά ανοίγματα P_1, P_2. Διαφορετικά χρησιμοποιούμε αυτή του (Σχ. 12.2). Πρόκειται για διάταξη συμβολής μακρινού πεδίου. Στην περίπτωση αυτή το κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου D βρίσκεται στο εμπρός εστιακό επίπεδο φακού L εστιακής απόστασης f_L. Που σημαίνει ότι τα δύο κυκλικά ανοίγματα στις θέσεις P_1, P_2 φωτίζονται με σχεδόν επίπεδο μέτωπο κύματος. Και ακριβώς πίσω από αυτά τα ανοίγματα τοποθετείται φακός L', στο εστιακό επίπεδο του οποίου (σε απόσταση f'_L όση η εστιακή του απόσταση) παίρνουμε το πρότυπο συμβολής.

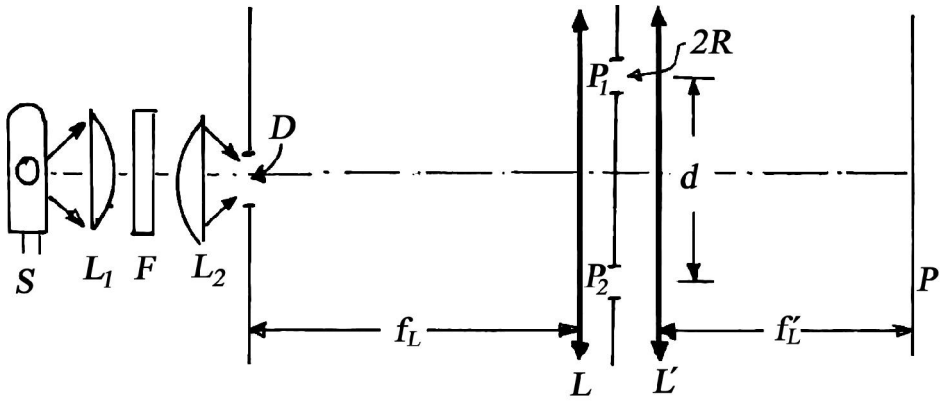
(Ι) Με τη βοήθεια της θεωρίας της μερικής συμφωνίας και του θεωρήματος των Van Cittert – Zernike (βλ. ΘΕΜΑ 2), μπορούμε να προσδιορίσουμε μια συγκεκριμένη τιμή για την απόσταση L. Πράγματι ο βαθμός χωρικής συμφωνίας Γ_{21} στο επίπεδο των ανοιγμάτων που καθορίζει τον χωρικό βαθμό συσχετισμού μιας

διαταραχής στο ένα άνοιγμα σε σχέση με μια άλλη στο άλλο θα δίνεται από τη ((σχ. 2.25) (ΘΕΜΑ 2)):

$$\Gamma_{21} = 2J_1(2\pi p)/2\pi p \qquad (12.1)$$

όπου $p = d\sin a/\lambda$ και a=$(D/2)/L$ (Σχ. 12.3α). Πολύ καλό βαθμό συμφωνίας θα έχουμε κατά τα γνωστά όταν $2\pi p \le 1$ (Σχ. 12.3β), από την οποία συνάγουμε ότι $\Gamma_{21} \ge 0.88$. Τότε $p = 1/(2\pi) \simeq 0.16$ και επειδή:

$p = d\sin a/\lambda \Rightarrow d \le 0.16\lambda/\sin a = 0.16L(D/2)$. Άρα η τιμή του L μετά την αντικατάσταση: $D = 1\text{mm}$, $d = 1\text{mm}$, $\lambda = 0.5461\times10^{-3}\text{mm}$ θα είναι: $L \ge 5.7\text{m}$. Για την περίπτωση που το άνοιγμα διαμέτρου D φωτίζεται από λευκό φως, η τιμή για την L θα είναι παραπλήσια επειδή το λ αντικαθίσταται από το $\lambda = \bar{\lambda} = 0.55\times10^{-3}\text{mm}$.

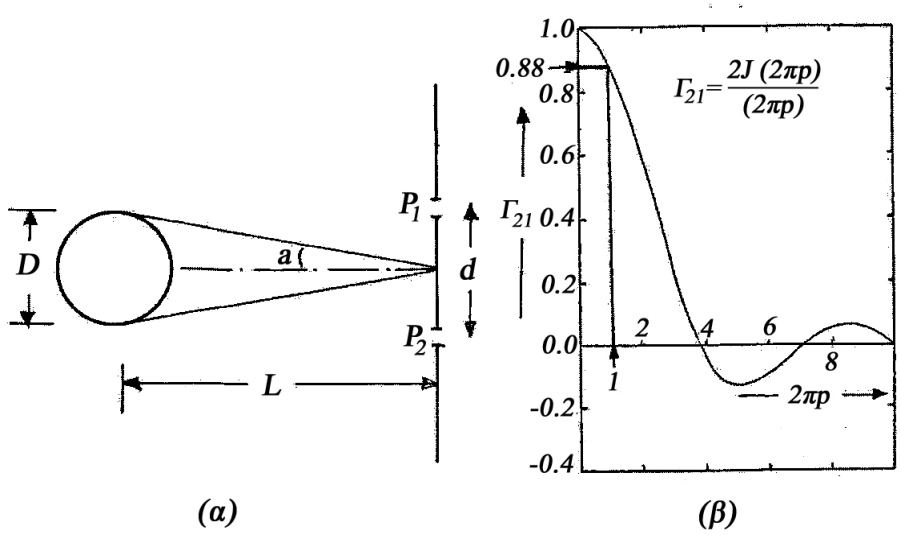


(Σχ. 12.2)

(ΙΙ) Ο αριθμός των κροσσών που επιτρέπεται να σχηματιστούν στο πέτασμα P σε απόσταση L' και καθορίζεται με βάση τη συνθήκη συμβολής μακρινού πεδίου, εξαρτάται από το μήκος συμφωνίας l_c των κυματοσυρμών των εκπεμπόμενων από την εκάστοτε πηγή. Γνωρίζουμε ότι $l_c = c\cdot\tau_c$ και $\tau_c = 1/\Delta\nu$ όπου τ_c ο χρόνος συμφωνίας και $\Delta\nu$ το αντίστοιχο εύρος ζώνης συχνοτήτων (σχ. 6.1.2.21,20). Τότε με τη βοήθεια του (Πίν. 6.2.1.11) βρίσκουμε α) Για την πράσινη γραμμή του Hg: $l_c \simeq 0.3\text{mm}$ και β) Για το λευκό φως: $l_c = 1.8\bar{\lambda} \simeq 0.001\text{mm}$. Όσον αφορά την απόσταση L' για συνθήκες συμβολής μακρινού πεδίου, αυτή δίνεται από τη σχέση: $L' > d^2/\lambda$ (βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός, (Άσκ.1 Λυμένη)). Μετά την αντικατάσταση βρίσκουμε: $L' > 1.83\text{m}$. Συνήθως όμως είναι δύσκολο εργαστηριακά να τοποθετήσουμε το πέτασμα P σε μεγάλη απόσταση από τα ανοίγματα P_1, P_2. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε αμέσως μετά από αυτά θετικό φακό εστιακής απόστα-

σης f_L' (Σχ. 12. 2) στο εστιακό επίπεδο του οποίου παίρνουμε το πρότυπο συμβολής.

Γνωρίζουμε ότι η διαφορά οπτικού δρόμου $d\sin\theta'$ (Σχ. 12.4α) που αντιστοιχεί μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων συμβολής είναι όσο το μ.κ. λ. Επομένως ο μέγιστος αριθμός $N/2$ κροσσών συμβολής (από το κέντρο O του προτύπου προς μία διεύθυνση) που μπορεί να παρατηρηθεί, αντιστοιχεί στην συνθήκη για την ο-



(Σχ. 12.3)

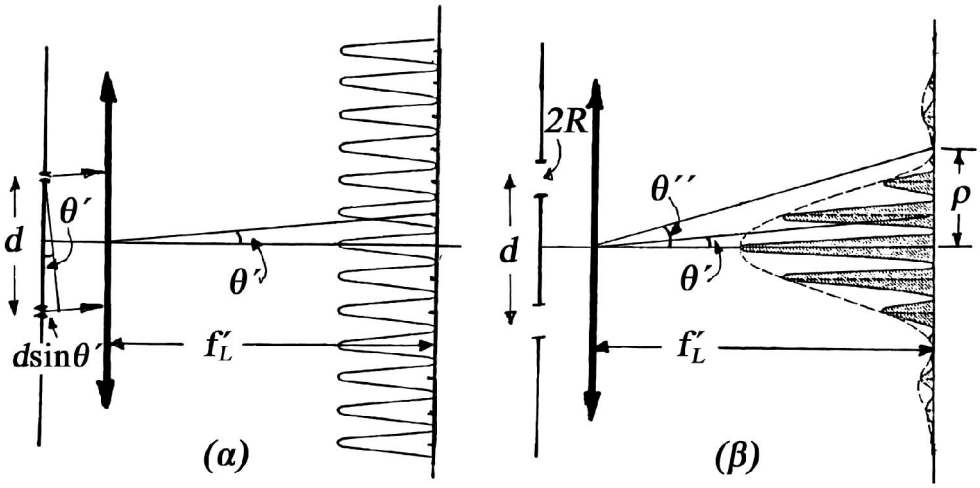
ποία η μέγιστη διαφορά οπτικού δρόμου $d\sin\theta$ θα είναι ίση με το μήκος συμφωνίας l_c. Άρα ο αριθμός των κροσσών θα δίνεται από τη σχέση: $N/2 = l_c/\lambda$. Για την πράσινη γραμμή του Hg βρίσκουμε ότι $l_c = 0.3\text{mm}$ και επειδή το μ.κ. του είναι: $\lambda = 0.5461\times10^{-3}\text{mm}$ θα είναι $N/2 = 550$ και άρα $N = 1100$. Για το λευκό φως όμως $l_c = 0.001\text{mm}$ και επειδή $\lambda = \bar{\lambda} = 0.55\times10^{-3}\text{mm}$ θα είναι $N/2 \simeq 1.8$ και άρα $N \simeq 3$. Δηλ. ο τάξης $m = 0$ και $m = \pm1$, οι οποίοι συνοδεύονται από ανάλυση του φωτός λόγω της πολυχρωματικότητάς του.

(ΙΙΙ) Γνωρίζουμε (σχ. 6.4.1.18) ότι η περίοδος T' των κροσσών συμβολής από πείραμα του Young δίνεται από τη σχέση $T' = \lambda L'/d$ ή εφόσον χρησιμοποιείται φακός εστιακής απόστασης f_L' από την $T' = \lambda f_L'/d$. Τότε το γωνιακό άνοιγμα θ' με το οποίο φαίνεται ένας κροσσός από το κέντρο του φακού θα δίνεται από τη σχέση $\tan\theta' \simeq \theta' = T'/f_L' = \lambda/d$. Ο αριθμός όμως των κροσσών συμβολής που έχουν τη δυνατότητα να εμφανιστούν, περιστέλλεται δραστικά από τα φαινόμενα περίθλασης λόγω των πεπερασμένων διαστάσεων των δύο κυκλικών ανοιγμάτων. Ουσιαστικά τότε, ο αριθμός των κροσσών συμβολής που είναι εμφανείς, περιλαμβάνεται στον κεντρικό λοβό περίθλασης (Σχ. 12.4β), με γωνιακό άνοιγμα $2\theta''$ που αντι-

στοιχεί στο δίσκο του Airy (βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός (σχ. 7.5.1.11,12)). Κατά τα γνωστά η ακτίνα του δίσκου του Airy δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = 1.22\lambda f_L' / (2R) \tag{12.2}$$

όπου $2R$ η διάμετρος των κυκλικών ανοιγμάτων. Επομένως το γωνιακό άνοιγμα θ'' θα δίνεται από τη σχέση: $\tan\theta'' \simeq \theta'' = \rho / f_L' = 1.22\lambda/(2R)$. Και για $\lambda = 0.5461\times10^{-3}\,\text{mm}$, $f_L' = 200\text{mm}$, $2R = 0.25\text{mm}$ και $d = 1\text{mm}$ βρίσκουμε: $\rho \simeq 0.533\text{mm}$ και $\theta'' = 0.1527^0$. Επίσης από τον τύπο που μας δίνει την περίοδο T'

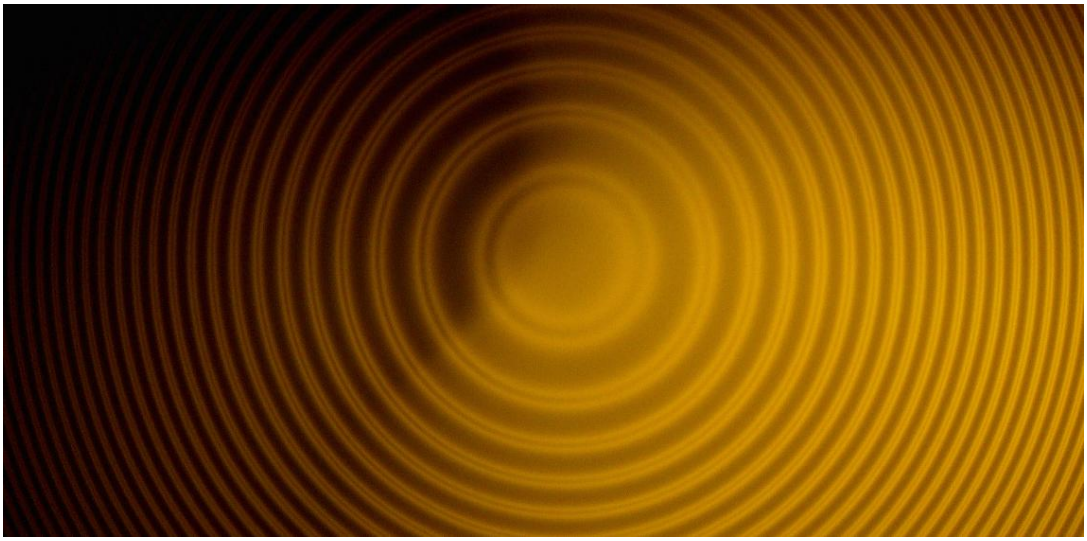


(Σχ. 12.4)

των κροσσών βρίσκουμε: $T' \simeq 0.1092\text{mm}$ και $\theta' \simeq 0.0312^0$. Επομένως ο αριθμός των κροσσών συμβολής που περιλαμβάνεται στον κεντρικό λοβό περίθλασης θα είναι $N' = \theta''/\theta' \simeq 5$. Για να αυξήσουμε τον αριθμό αυτό θα πρέπει να ελαττώσουμε τη διάμετρο $2R$ των κυκλικών ανοιγμάτων. Πράγματι για $2R = 0.01\text{mm}$, $\rho = 13.32\text{mm}$ οπότε $\theta'' = 3.81^0$ και για ίδια απόσταση μεταξύ των ανοιγμάτων (δηλ. ίδια περίοδο κροσσών) $\theta' \simeq 0.0312^0$ θα έχουμε: $N' = \theta''/\theta' \simeq 122$.

13. Διαθέτουμε ένα συμβολόμετρο Fabry-Perot του οποίου το ένα κάτοπτρο είναι σταθερό και το άλλο έχει τη δυνατότητα να μετακινηθεί, μεταβάλλοντας την μεταξύ τους απόσταση. Το συμβολόμετρο φωτίζεται με ακτινοβολία η οποία συνίσταται από δύο μ.κ. λ_1, λ_2 με $\lambda_1 > \lambda_2$, των οποίων η διαφορά στην τιμή τους είναι πολύ μικρή. Σε πρώτη φάση υποθέτουμε ότι ο N_1 τάξης κεντρικός φωτεινός κροσσός του λ_1 μ.κ. συμπίπτει με τον N_2

σκοτεινό κεντρικό κροσσό του λ_2 μ.κ. Δηλ. τα δύο ανεξάρτητα συστήματα κροσσών που οφείλονται στα δύο μ.κ. είναι μεταξύ τους διακριτά (διαχωρισμένα), όπως φαίνεται στην (Εικ. 13.1). Τότε η απόσταση μεταξύ των



(Εικ. 13.1)

κατόπτρων είναι η d_1. Σε δεύτερη φάση μετατοπίζουμε το κινητό κάτοπτρο έτσι ώστε να συμβεί ο επόμενος διαχωρισμός των δύο συστημάτων των κροσσών συμβολής. Τότε η απόσταση μεταξύ των κατόπτρων γίνεται d_2. Κάτω από αυτές τις συνθήκες ν' αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda^2}{2(d_2 - d_1)}$$

όπου $\lambda = \lambda_1 \simeq \lambda_2$.

ΛΥΣΗ

Εφόσον κατά την πρώτη φάση ο κεντρικός φωτεινός κροσσός τάξης N_1 για το μ.κ. λ_1 συμπίπτει με τον κεντρικό σκοτεινό κροσσό τάξης N_2 για το μ.κ. λ_2, θα ισχύει η σχέση:

$$2d_1 = N_1\lambda_1 = \left(N_1 + \frac{n}{2}\right)\lambda_2 \qquad n = 1,3,5,\cdots \tag{13.1}$$

Κατά τη δεύτερη φάση του διαχωρισμού των κροσσών θα έχουμε την σχέση:

$$2d_2 = N_2\lambda_1 = \left[N_2 + \left(\frac{n}{2}+1\right)\right]\lambda_2 \qquad n = 1,3,5,\cdots \tag{13.2}$$

Και αφαιρώντας κατά μέλη τις (σχ. 13.1,2) βρίσκουμε:

$$2\left(d_2 - d_1\right) = \left(N_2 - N_1\right)\lambda_1 = \left(N_2 - N_1\right)\lambda_2 + \lambda_2 \tag{13.3}$$

από την οποία:

$$\left(N_2 - N_1\right)\left(\lambda_1 - \lambda_2\right) = \lambda_2 \tag{13.4}$$

Αλλά από τα δύο πρώτα μέλη της (σχ. 13.3) θα έχουμε επί πλέον:

$$\left(N_2 - N_1\right) = \frac{2\left(d_2 - d_1\right)}{\lambda_1} \tag{13.5}$$

Οπότε αντικαθιστώντας τη (σχ. 13.5) στην (σχ. 13.4) θα έχουμε τελικά:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\left(d_2 - d_1\right)} \simeq \frac{\lambda^2}{2\left(d_2 - d_1\right)} \tag{13.6}$$

επειδή όπως υποθέσαμε: $\lambda_1 \simeq \lambda_2 = \lambda$

(Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιείται για τον πειραματικό προσδιορισμό του ενός από τα δύο μ.κ. όταν είναι γνωστή η τιμή του άλλου και εφόσον γνωρίζουμε τη διαφορά $d_2 - d_1$ η οποία όμως μετρείται με τη βοήθεια του τυμπάνου μετακίνησης του κατόπτρου του συμβολόμετρου).

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μια από τις πλέον στενές φασματικές γραμμές, της οποίας το φως χρησιμοποιούνταν κατά κόρο σε εφαρμογές της κλασσικής συμβολομετρίας (πριν την ανακάλυψη των πηγών Laser) ήταν η κόκκινη γραμμή της χαμηλής πίεσης λυχνίας του Cd (Καδμίου). Το μ.κ. της ήταν $\lambda_0 = 643.8\text{nm}$ και το φασματικό της εύρος $\Delta\lambda = 0.0013\text{nm}$. Με βάση αυτά τα δεδομένα να υπολογιστούν: α) Το μήκος συμφωνίας του l_c και β) Ο χρόνος συμφωνίας του τ_c. γ) Να προσδιοριστεί επίσης η συχνοτική ευστάθεια $\Delta\nu/\nu_0$ αυτού του φωτός.

Υπόδειξη: Τα l_c, τ_c βρίσκονται με βάση τους γνωστούς τύπους και το $\Delta\nu$ από τη σχέση που το συνδέει με το $\Delta\lambda$. α) $l_c = 0.3\text{m}$. β) $\tau_c = 1\times10^{-9}\text{s}$. γ) $\Delta\nu/\nu_0 = 2\times10^{-6}$.

2. Υιοθετούμε όλα τα δεδομένα της λυμένης (Άσκ. 3) με τη μόνη διαφορά ότι τα δύο προς επαλληλία γραμμικά μετ. κύματος είναι μεταξύ τους ασύμφωνα. Ζητούμε για την περίπτωση αυτή να υπολογιστεί ποια θα είναι η κατανομή της έντασης του φωτός στο επίπεδο x, y.

Υπόδειξη: Λόγω της ασυμφωνίας μεταξύ των δύο δεσμών φωτός, οι εξισώσεις για τα πεδία $\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t), \mathbf{E}_2(\mathbf{r},t)$ θα δίνονται από τις σχέσεις:

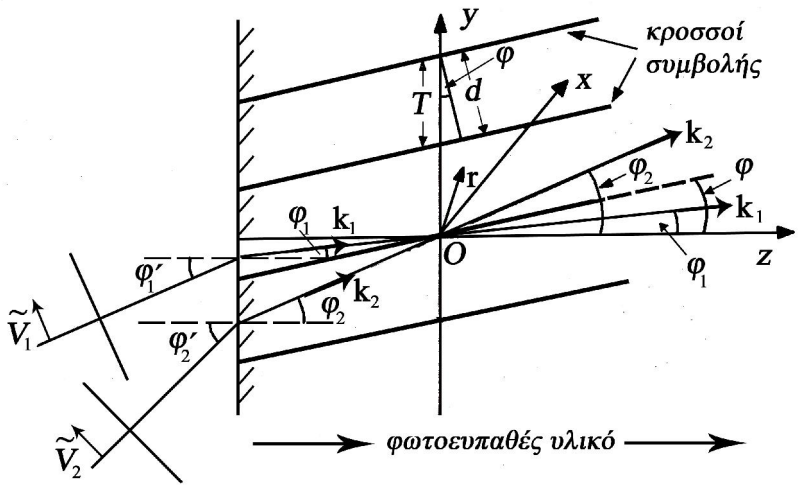
$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_{01}\cos\left[\omega t - \mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r} + \phi_1(t)\right]$$
$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_{02}\cos\left[\omega t - \mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r} + \phi_2(t)\right]$$

όπου τώρα οι φάσεις ϕ_1, ϕ_2 δεν είναι σταθερές αλλά ταχύτατα και τυχαία μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του χρόνου (τα $\mathbf{E}_{01}, \mathbf{E}_{02}$ θεωρούμε σταθερά). Και θα πρέπει με αυτά τα δεδομένα, να υπολογιστούν οι μέσες χρονικές τιμές για την κατανομή της έντασης στο επίπεδο x, y (λυμένη (Άσκ. 3) (σχ. 3.5)):

$$I = \varepsilon_0 c\langle\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\rangle = \varepsilon_0 c\langle(\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2)\cdot(\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2)\rangle =$$
$$= \varepsilon_0 c\langle\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_1\rangle + \varepsilon_0 c\langle\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{E}_2\rangle + 2\varepsilon_0 c\langle\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2\rangle$$

Μέσω πράξεων θα πρέπει ν' αποδείξουμε ότι: $\varepsilon_0 c\langle\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_1\rangle = \varepsilon_0 c E_{01}^2/2$, όπως και ότι: $\varepsilon_0 c\langle\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_1\rangle = \varepsilon_0 c E_{01}^2/2$ και $\langle\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2\rangle = 0$. Που σημαίνει ότι ο παράγοντας συμβολής θα μηδενίζεται. Επομένως η κατανομή της έντασης τελικά θα δίνεται από τη σχέση: $I = I_1 + I_2$.

3. Όπως φαίνεται στο (Σχ. 3.1), δύο σύμφωνα επίπεδα γραμμικά πολωμένα μετ. κύματος προσπίπτουν στην επιφάνεια ενός διαφανούς φωτοευαίσθητου υλικού (π.χ. φωτογραφικού φιλμ) δ.δ. n, με γωνίες πρόσπτωσης ϕ_1', ϕ_2' και διαθλώμενα στο εσωτερικό του έρχονται σε επαλληλία κατά μήκος όμως όλου του εύρους του υλικού το οποίο έχει ένα ορισμένο πάχος. α) Να υπολογιστεί η μορφολογία και η περίοδος των σχηματιζόμενων κροσσών συμβολής. β) Να προσδιοριστούν τα όρια αυτής της περιόδου για τις



(Σχ. 3.1)

δύο περιπτώσεις που τα μέτ. κύματος: 1) Προσπίπτουν κάθετα στην επιφάνεια και έχουν την ίδια διεύθυνση. 2) Προσπίπτουν εφαπτομενικά του υλικού με γωνίες $\phi_1' = -\phi_2' = \pi/2$. Το μ.κ. του φωτός στον αέρα είναι λ_0 και στο υλικό λ. Τα διανύσματα των εντάσεων των ηλ. πεδίων $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2$ βρίσκονται στο επίπεδο της σελίδας.

Υπόδειξη: Θα θεωρήσουμε κατ' αρχή ένα τρισορθογώνιο σ.σ. x, y, z στο εσωτερικό του υλικού (Σχ. 3.1) με το επίπεδο x, y παράλληλο της επιφάνειας του υλικού. Οπότε τα κυματοδιανύσματα $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ των δύο επιπέδων μετ. κύματος των διαδιδόμενων στο εσωτερικό του υλικού, θα σχηματίζουν με τον άξονα z γωνίες ϕ_1, ϕ_2 όπως αυτές προσδιορίζονται από το νόμο του Snell. Τα πεδία $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2$ (γραμμένα σε μιγαδική μορφή και με μοναδιαία πλάτη) θα δίνονται από τις σχέσεις: $\widetilde{V}_1 = e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}$ και $\widetilde{V}_2 = e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}$ όπου $\mathbf{r}$ είναι ένα διάνυσμα θέσης στο επίπεδο x, y. Κάτω από αυτές τις συνθήκες θα πρέπει ν' αποδείξουμε ότι έχουμε το σχηματισμό κροσσών συμβολής οι οποίοι ε-

πεκτείνονται στο εσωτερικό του υλικού και σε μορφή επιπέδων, που γενικά δεν είναι κάθετα στην επιφάνεια του υλικού.

α) Η περίοδός τους T (Σχ. 3.1) θα δίνεται από τη σχέση:

$$T = \frac{\lambda}{\sin\phi_2 - \sin\phi_1} = \frac{\lambda_0}{\sin\phi_2' - \sin\phi_1'}$$

και η κάθετη απόστασή τους $d = T\cos\phi$.

β) 1) Για $\phi = 0$ και $\phi_1' = \phi_2' = 0^0 \quad \Rightarrow \quad T \to \infty,\ f \to 0(\text{γραμμές/mm})$

2) Για $\phi = 0$ και $\phi_2' = -\phi_1' = 90^0 \quad \Rightarrow \quad T = \lambda_0/2,\ f = (\lambda_0/2)(\text{γραμμές/mm})$

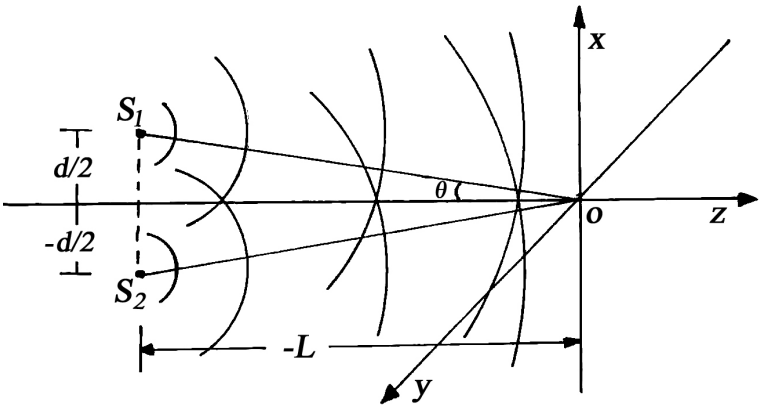
Όπου με f συμβολίζουμε τη λεγόμενη ***χωρική συχνότητα***, που παριστάνει τον αριθμό των γραμμών (κροσσών) των καταγεγραμμένων ανά χιλιοστό. Αριθμητική εφαρμογή: Για $\lambda_0 = 632.8\text{nm} = 0.6328\times10^{-3}\,\text{mm}$ θα έχουμε οριακά: $0 < f < 3160$ γραμμές/mm.

4. Στην (§ 6.4.1) επιλύσαμε το πρόβλημα της συμβολής δύο συμφώνων σφαιρικών μετ. κύματος φωτός σε μια απόσταση L. Τα προαναφερόμενα προερχόταν από δύο πολύ μικρών διαστάσεων ανοίγματα (σημειακές πηγές), που απείχαν μεταξύ τους απόσταση d. Να μελετηθεί το ίδιο πρόβλημα ακριβώς, λαμβάνοντας υπόψη μας ότι η κατανομή του πεδίου ενός σφαιρικού μετ. κύματος σ' ένα επίπεδο x, y που προέρχεται από μια πηγή S σε απόσταση $-L$ από αυτό, δίνεται στην παραξονική προσέγγιση από τη γνωστή σχέση (βλ. Κεφ. 1: Κύματα (§1.8) Παράδειγμα): $V = e^{\frac{-i\pi(x^2+y^2)}{\lambda L}}$, για το οποίο το πλάτος του κύματος λαμβάνεται ίσο με τη μονάδα.

Υπόδειξη: Στο (Σχ. 4.1) μπορούμε να δούμε τη θέση των δύο πηγών σε σχέση με το επίπεδο x, y και σε απόσταση $-L$ από αυτό. Τότε η κατανομή των δύο σφαιρικών μετ. κύματος από τις θέσεις S_1, S_2 στο x, y εκφράζεται ως εξής:

$$V_1 = e^{\frac{-i\pi\left[(x+d/2)^2+y^2\right]}{\lambda L}}, \qquad V_2 = e^{\frac{-i\pi\left[(x-d/2)^2+y^2\right]}{\lambda L}}$$

Και με την προϋπόθεση ότι τα κύματα είναι σύμφωνα, η κατανομή της έντασης στο επίπεδο x, y θα δίνεται από τη σχέση: $I = |V_1 + V_2|^2$. Θα πρέπει να βρούμε τελικά ότι: $I = 4\cos^2\frac{\pi x d}{\lambda L}$. Δηλ. ευθύγραμμους κροσσούς συμβολής παράλληλους με τον άξονα y, που η περίοδός τους είναι: $T = \lambda L/d$.

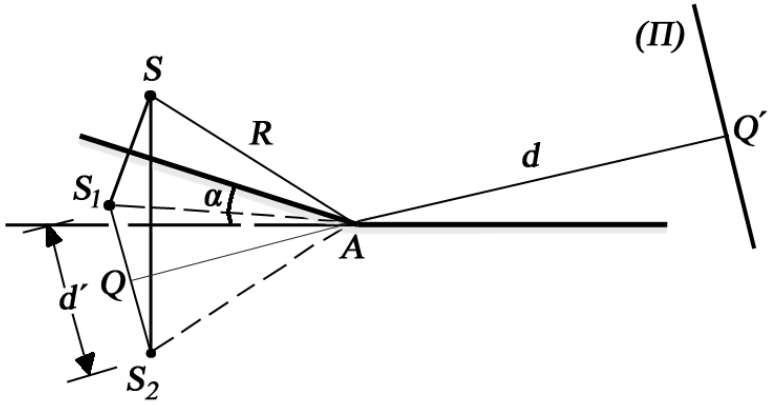


(Σχ. 4.1)

5. Δύο σύμφωνες σημειακές πηγές S_1, S_2 εκπέμπουν στο χώρο αρμονικά σφαιρικά μετ. κύματος σε φάση, μ.κ. λ_0. Η απόσταση μεταξύ τους είναι $d = \lambda_0/2$. α) Ποια θα είναι η κατανομή της έντασης συναρτήσει της γωνίας θ που μετρείται από το κέντρο μεταξύ των S_1, S_2. β) Να σχεδιαστεί το πολικό διάγραμμα $I = I(\theta)$. γ) Ποιες θα είναι οι τιμές της $I(\theta)$ για τις γωνίες: $\theta = 0^0, \theta = 30^0$ και $\theta = 90^0$.

Υπόδειξη: Η άσκηση είναι παρόμοια με την (Άσκ. 6 Λυμένη). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη (σχ. 6.4.1.10) για $I_1 = I_2 = I_0$ και $\delta = k(r_2 - r_1)$ (επειδή $\phi_1 = \phi_2$). Τελικά: $I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)$ και $I(0^0) = 4I_0, I(30^0) = 2I_0, I(90^0) = 0^0$.

6. Αναφερόμαστε στη διάταξη του διπλού κατόπτρου Fresnel ((§ 6.3.1) (Σχ. 6.3.1.2)). Πρόκειται για μια κλασσική διάταξη συμβολής διαίρεσης μετ. κύματος. Στο (Σχ. 6.1) τα δύο επίπεδα κάτοπτρα σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία a της οποίας η τιμή είναι πολύ μικρή. Μια σημειακή πηγή φωτός S τοποθετείται πολύ



(Σχ. 6.1)

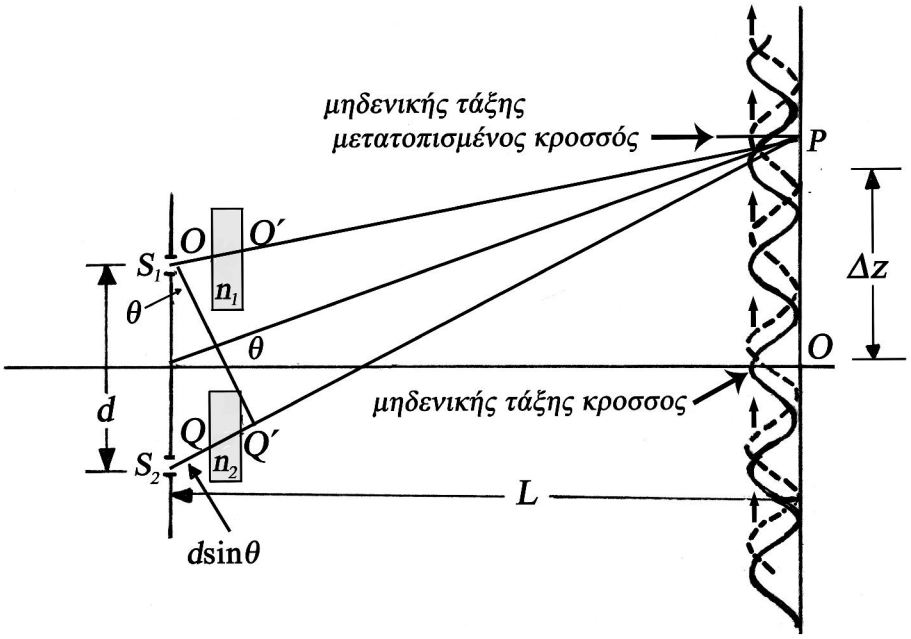
κοντά σ' ένα από τα κάτοπτρα και απέχει απόσταση $R = 50\text{cm}$ από το σημείο επαφής A των δύο κατόπτρων. Από το σημείο A και σε απόσταση $d = 1.5\text{m}$ βρίσκεται πέτασμα *(Π)*. Τμήμα του σφαιρικού μετώπου κύματος που προέρχεται από την S ανακλάται στο πρώτο κάτοπτρο και ένα άλλο του τμήμα στο δεύτερο. Τα ανακλώμενα από τα δύο κάτοπτρα μετ. κύματος έρχονται σε επαλληλία στην περιοχή του πετάσματος *(Π)* και συσχετιζόμενα δίνουν φαινόμενα συμβολής. Αν η τιμή της γωνίας που σχηματίζουν τα κάτοπτρα είναι $\alpha = 0.05^0$ και το μ.κ. της εκπέμπουσας πηγής είναι $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$ να υπολογιστεί η περίοδος των σχηματιζόμενων στο πέτασμα κροσσών συμβολής.

Υπόδειξη: Στην προκειμένη περίπτωση – όπως μπορούμε να δούμε από το (Σχ. 6.1) – η πηγή S σχηματίζει δύο φανταστικές πηγές S_1, S_2 μέσω των δύο κατόπτρων της διάταξης Fresnel. Τα SS_1A και SS_2A είναι ισοσκελή τρίγωνα με μεσοκαθέτους στις SS_1, SS_2 τα δύο κάτοπτρα. Τα δε σημεία S, S_1, S_2 βρίσκονται σε περιφέρεια κύκλου με κέντρο το A και ακτίνα την R. Με βάση αυτή την γεωμετρία αποδεικνύεται ότι: $S_1S_2 = 2R\sin a \simeq 2Ra = d'$ επειδή η γωνία a είναι πολύ μικρή. Επίσης η απόσταση από το μέσο της S_1S_2 έως το πέτασμα *(Π)* είναι ίση με $R + d$. Με δεδομένο δε ότι οι πηγές S_1, S_2 εκπέμπουν σε φάση και έχουν τις ίδιες εντάσεις, η κατανομή της έντασης του φωτός στο *(Π)* θα δίνεται από τη γνωστή σχέση: $I = I_0 \cos^2(\delta/2)$. Όπου $\delta = k(r_2 - r_1)$ η διαφορά φάσης από τις S_1, S_2 σε ένα σημείο του πετάσματος. Θα πρέπει να βρούμε τελικά: $T = \dfrac{\lambda(R+d)}{2Ra}$. Και με την αντικατάσταση των αριθμητικών δεδομένων: $T = 1.45\text{mm}$.

7. Στη διάταξη συμβολής του Young οι σημειακές πηγές S_1, S_2 απέχουν μεταξύ τους απόσταση d και το πέτασμα όπου σχηματίζονται οι κροσσοί συμβολής απόσταση L από αυτές. Το μηδενικής τάξης μέγιστο συμβολής, σχηματίζεται κατά τα γνωστά στο σημείο που η μεσοκάθετη στις S_1, S_2 τέμνει το πέτασμα σε απόσταση L. α) Να υπολογιστεί η η περίοδος T των κροσσών συμβολής. β) Τι θα συμβεί στο πρότυπο των κροσσών συμβολής, όταν ακριβώς μετά από κάθε μια από τις πηγές S_1, S_2 παρεμβάλλουμε αντίστοιχα από ένα πλακίδιο του ίδιου πάχους D με δ.δ. n_1, n_2 όπου $n_1 > n_2$.

Υπόδειξη: α) Η περίοδος των κροσσών βρίσκεται από τη γνωστή σχέση: $T = \lambda L/d$. Και με βάση τα αριθμητικά δεδομένα της άσκησης θα είναι: $T = 1.2\text{mm}$. β) Όταν μπροστά στα ανοίγματα S_1, S_2 δεν έχουν παρεμβληθεί τα πλακίδια, τότε ο μηδενικής τάξης κροσσός συμβολής σχηματίζεται ακριβώς στη θέση που η μεσοκάθετη στο S_1S_2 τέμνει το πέτασμα, εδώ το σημείο O (Σχ. 7.1). Όταν όμως παρεμ-

βληθούν αντίστοιχα ανά ένα τα πλακίδια, τότε το πρότυπο συμβολής σαν σύνολο φαίνεται να μετατοπίζεται προς μια ορισμένη διεύθυνση παράλληλα με τον εαυτό του. Σαν αντιπροσωπευτικό σημείο του προτύπου, θα επιλέξουμε εκείνο όπου σχηματίζεται ο μηδενικής τάξης κροσσός, για την πρώτη και τη δεύτερη φάση της δια-



(Σχ. 7.1)

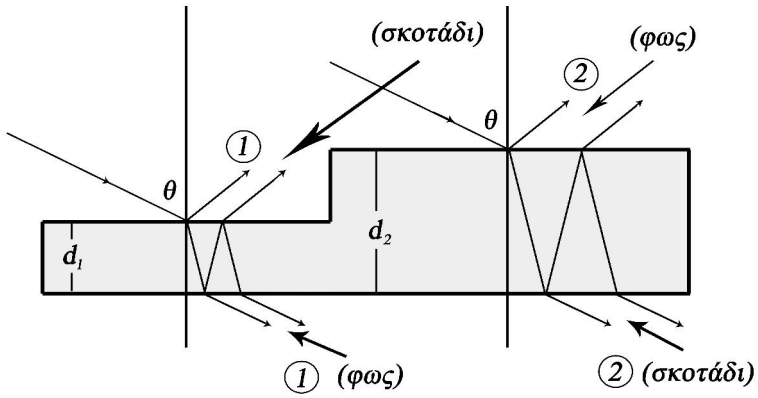
δικασίας. Στη δεύτερη φάση ο κροσσός μετακινήθηκε από το σημείο O στο P κατά Δz. Για το σημείο αυτό η διαφορά του οπτικού δρόμου από τα S_1, S_2 θα πρέπει να είναι ίση με μηδέν. Δηλ. θα ισχύει: $(S_2Q + n_2D + Q'P) - (S_1O + n_1D + O'P) = 0$. Και με την προσθαφαίρεση του D στην τελευταία αυτή σχέση, βρίσκουμε τελικά: $\Delta z = \frac{DL}{d}(n_1 - n_2)$. Θα πρέπει κατόπιν να δειχθεί ότι η μετακίνηση γίνεται προς το πλακίδιο με το μεγαλύτερο δ.δ.

8. Θεωρούμε το κυκλικής συμμετρίας πρότυπο συμβολής (κροσσοί Haidinger), που προκύπτει κατά το φωτισμό μ' εκτεταμένη πηγή φωτός πλακιδίου με παράλληλες έδρες. Το πάχος του είναι $d = 2\text{mm}$, ο δ.δ. $n = 1.5$ και το μ.κ. του φωτός $\lambda = 600\text{nm}$. α) Να υπολογιστεί η τάξη m του κεντρικού κροσσού συμβολής ($\theta_t = 0$). β) Θα είναι ο κροσσός αυτός φωτεινός ή σκοτεινός;

Υπόδειξη: Κατά τα γνωστά η διαφορά του οπτικού δρόμου για συμβάλλουσες στο άπειρο διαταραχές μέσω του πλακιδίου δίνεται από τη σχέση:

$\delta = \left(4\pi dn\cos\theta_t/\lambda_0\right) - \pi$. Οπότε θα πρέπει να εξετάσουμε ποια θα είναι η τιμή του m για συνθήκες μεγίστων και ελαχίστων και η οποία θα πρέπει ν' ανήκει στο σύνολο των ακεραίων αριθμών. Βρίσκεται ότι: $m = 10^4$ για συνθήκες ελαχίστων. Επομένως ο κεντρικός κροσσός του προτύπου συμβολής θα είναι σκοτεινός.

9. Στο (Σχ. 9.1) βλέπουμε ένα ιδιόμορφο πλακίδιο δύο βαθμίδων δ.δ. $n = \sqrt{3}$ του οποίου οι έδρες είναι παράλληλες. Τα πάχη των βαθμίδων είναι: $d_1 = 0.16\mu\text{m}$ και $d_2 = 0.24\mu\text{m}$. Επίπεδο μετ. κύματος μ.κ. $\lambda_0 = 0.48\mu\text{m}$ προσπίπτει στη επιφάνειά



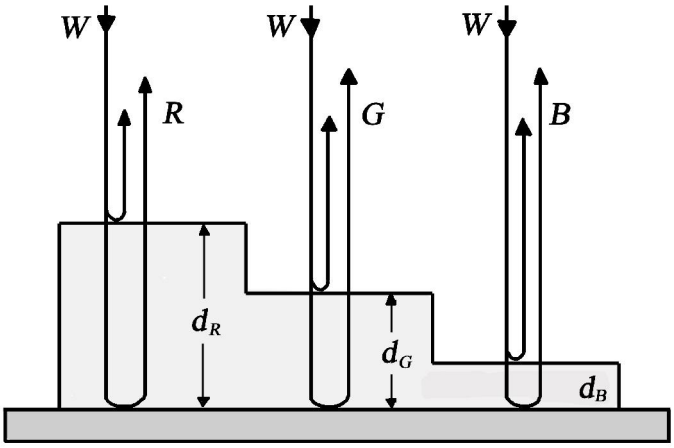
(Σχ. 9.1)

του με κλίση $\theta = 60^0$. Πως ακριβώς θα φαίνεται το πλακίδιο στο ανακλώμενο και στο διερχόμενο φως;

Υπόδειξη: Θα θεωρήσουμε τα δύο ζεύγη των ανακλώμενων διαταραχών από τις πάνω επιφάνειες και τα δύο διερχόμενα από τις κάτω (συνολικά τέσσερεις περιπτώσεις). Και για κάθε ζεύγος διαταραχών θα πρέπει με βάση τι σχέση: $L = 2dn\cos\theta_t - L'$ να υπολογίσουμε την τιμή της διαφοράς του οπτικού τους δρόμου (όπου $L' = 0$ ή $\lambda/2$). Για ν' αποφανθούμε τελικά αν έχουμε εποικοδομητική ή όχι συμβολή. Το μάτι μας τότε θ' αντιλαμβάνεται αν η επιφάνεια είναι φωτεινή ή σκοτεινή. Δηλ. αν αναδύεται από αυτήν φως ή όχι. Στο (Σχ. 9.1) σημειώνουμε για τις τέσσερεις περιπτώσεις το τελικό αποτέλεσμα.

10. Πάνω σ' ένα κατάλληλο αδιαφανές υπόβαθρο, εξαχνώνουμε τετηγμένο Χαλαζία (πρόκειται για το γνωστό διαφανές διηλεκτρικό) σε τρείς διαδοχικές θέσεις με μορφή κλίμακας, όπως φαίνεται στο (Σχ. 10.1). Τα πάχη στις θέσεις αυτές είναι: d_R, d_G, d_B. Το προαναφερόμενο σύστημα θέλουμε να έχει την εξής ιδιότητα: Αν φωτιστεί σχεδόν κάθετα με λευκό φως, το μάτι ενός παρατηρητή που βλέπει από

πάνω, ν' αντιλαμβάνεται ότι η απόχρωση του αναδυομένου φωτός από τις τρεις διαδοχικές επιφάνειες των βαθμίδων είναι: Κόκκινη, πράσινη και μπλε. Δηλ. στις περιοχές αυτές έχουμε αντίστοιχα ενίσχυση αυτών των χρωμάτων. Όπου η κόκκινη



(Σχ. 10.1)

αντιστοιχεί σε μέσο μ.κ. $\lambda_R = 0.643\mu\text{m}$, η πράσινη σε $\lambda_G = 0.546\mu\text{m}$ και η μπλε σε $\lambda_B = 0.481\mu\text{m}$. Οι αντίστοιχοι δ.δ. για τα προαναφερόμενα μ.κ. του τετηγμένου Χαλαζία είναι αντίστοιχα: $n_R = 1.4569,\ n_G = 1.4603,\ n_B = 1.4636$.

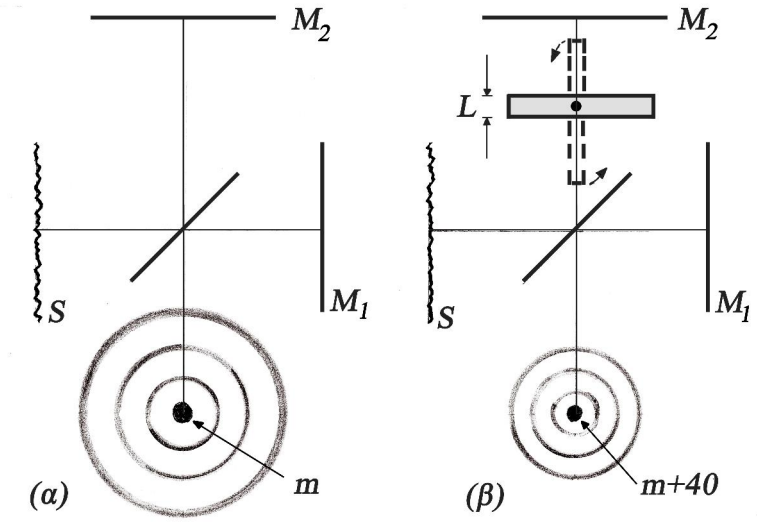
Υπόδειξη: Προκειμένου να έχουμε εποικοδομητική συμβολή από την κάθε επιφάνεια – τουλάχιστον για την περιοχή του προτεινόμενου μέσου μ.κ. – θα πρέπει κατά τα γνωστά για τις δύο ανακλώμενες, από την πάνω και την κάτω επιφάνεια κάθε βαθμίδας να ισχύει: $2d_i n_i - \lambda_i/2 = \lambda_i \quad i = R, G, B$. Θα πρέπει τελικά να βρούμε: $d_R = 0.3314\mu\text{m}$, $d_G = 0.2804\mu\text{m}$ και $d_B = 0.2459\mu\text{m}$. Αυτά είναι και τα ελάχιστα πάχη που θα πρέπει να εξαχνωθούν.

11. Ένας επιπεδόκυρτος φακός ακτίνας καμπυλότητας $R = 20\text{m}$ είναι με τα κυρτά του τοποθετημένος σε επίπεδη γυάλινη επιφάνεια. Το σύστημα φωτίζεται σχεδόν κάθετα με φως από λυχνία Na μ.κ. $\overline{\lambda} = 0.589\mu\text{m}$, οπότε εμφανίζεται το πρότυπο συμβολής των δακτυλίων (κροσσών) του Newton. Έχουμε τη δυνατότητα, η ενδιάμεση σφήνα που σχηματίζεται μεταξύ φακού και πλακιδίου να γεμίσει με γλυκερίνη που ο δ.δ. της είναι: $n_f = 1.4721$. α) Ν' αποδειχθεί ότι ο λόγος των ακτίνων των δακτυλίων για την περίπτωση πριν και μετά την εισαγωγή του υγρού, δεν εξαρτάται από την τάξη τους m. Επίσης να βρεθεί η αριθμητική τιμή αυτού του λόγου. β) Ποιες είναι οι τιμές των ακτινών για τον τάξης $m = 25$ σκοτεινό κροσσό για τις δύο

περιπτώσεις και τι ακριβώς συμβαίνει στο πρότυπο συμβολής σαν όλο μετά την εισαγωγή του υγρού.

Υπόδειξη: Θα πρέπει να εκφράσουμε την αναλυτική σχέση που μας δίνει τις ακτίνες των τάξης m σκοτεινών κροσσών. Τότε βρίσκεται ότι: $(x_{ma}/x_{ml}) = \sqrt{n_{fl}/n_{fa}}$, όπου x_{ma}, x_{ml} οι ακτίνες του m τάξης κροσσού πριν και μετά την εισαγωγή του υγρού. Δηλ. ο λόγος αυτός είναι ανεξάρτητος της τάξης m. β) Βρίσκουμε ότι: $x_{ma} = 17.16\text{mm}$ και $x_{ml} = 14.14\text{mm}$. Δηλ. το πρότυπο συμβολής κατά την εισαγωγή του υγρού συρρικνώνεται προς το κέντρο του.

12. Το συμβολόμετρο του Michelson φωτίζεται μ' εκτεταμένη πηγή που εκπέμπει φως μ.κ. $\lambda_0 = 0.546\mu\text{m}$ (πράσινη γραμμή του Hg). Τότε στο κέντρο του πεδίου του εμφανίζεται ο σκοτεινός κροσσός τάξης m, με δεδομένη μια θέση μεταξύ των σε κάθετη θέση κατόπτρων του M_1, M_2 (Σχ. 12.1α). Έστω τώρα ότι στον κλάδο



(Σχ. 12.1)

του κατόπτρου M_2 και παράλληλα σ' αυτό εισάγουμε ένα πλακίδιο από τετηγμένο Χαλαζία με παράλληλες έδρες πάχους $L = 23.585\mu\text{m}$ (Σχ. 12.1β). Τότε πόσοι τον αριθμό κροσσοί θα μετατοπιστούν (θα εξαφανιστούν) κινούμενοι προς το κέντρο του προτύπου συμβολής. Δηλ. ποια θα είναι η νέα τάξη του κροσσού στο κέντρο με το δεδομένο ότι αυτός θα είναι και πάλι σκοτεινός. Ο δ.δ. του πλακιδίου είναι $n = 1.46013$.

Σημείωση: Τη διαδικασία εξαφάνισης των κροσσών προς το κέντρο του προτύπου συμβολής, μπορούμε να την παρατηρήσουμε αν το πλακίδιο έχει τη δυνατότητα να περιστραφεί περί άξονα κάθετο προς τη βάση του συμβολόμετρου και

η αρχική του θέση είναι παράλληλη με το κάτοπτρο M_1. Τότε περιστρέφοντας αργά το πλακίδιο περί τον άξονά του και μέχρις αυτό να γίνει παράλληλο με το M_2 μπορούμε να μετρήσουμε ένα προς ένα τους εξαφανιζόμενους κροσσούς.

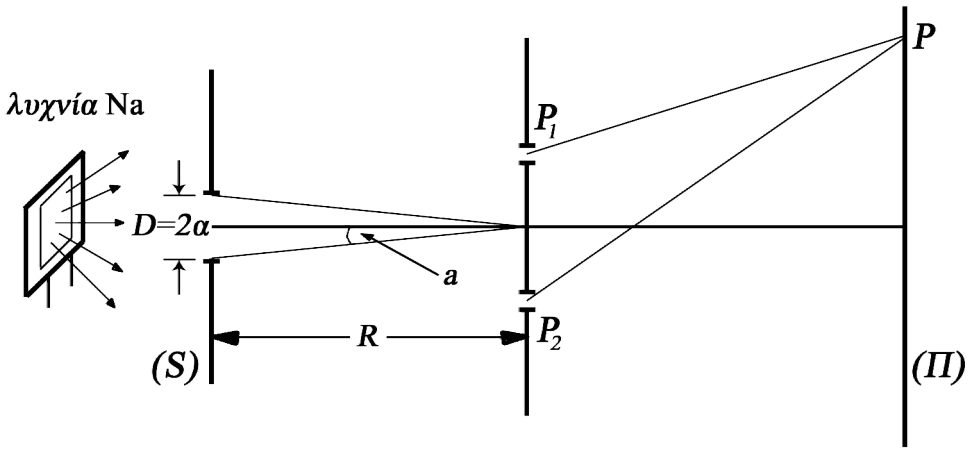
Υπόδειξη: Κατά τα γνωστά, η μετακίνηση του κατόπτρου M_2 καθώς απομακρύνεται από το M_1, είναι που αυξάνει τον οπτικό δρόμο και μεταβάλει την τάξη των κροσσών στο κέντρο του προτύπου συμβολής . Το ίδιο όμως μπορεί να συμβεί με ακίνητο το κάτοπτρο M_2 αλλά με παρεμβολή του πλακιδίου πάχους L. Τότε αυξάνεται ο οπτικός δρόμος κατά: $2(\Delta d) = 2(nL - n_a L) = 2(nL - 1.0L) = 2(n-1)L$ όπου $n_a = 1.0$ ο δ.δ. του αέρα. Τελικά μπορούμε να βρούμε ότι θα μετακινηθούν : $N = 40$ κροσσοί. Δηλ. η τάξη m' του σκοτεινού κροσσού στο κέντρο θα είναι: $m' = m + 40$.

13. Το συμβολόμετρο του Michelson φωτίζεται από ένα θαμπόγυαλο (εκτεταμένη πηγή), που στην επιφάνειά της προσπίπτει μια διευρυμένη δέσμη φωτός από Laser He-Ne μ.κ. $\lambda_0 = 0.6328\mu\text{m}$. α) Θέλουμε να προσδιοριστεί η απόσταση d μεταξύ του κατόπτρου M_2 και του M_1' (ειδώλου του κατόπτρου M_1) έτσι ώστε στο κέντρο του προτύπου συμβολής να εμφανίζεται ο τάξης $m = 4\times10^4$ φωτεινός κροσσός. β) Ποια θα είναι η τάξη του $p = 10$ φωτεινού δακτυλίου (κροσσού), μετρούμενου από τον πρώτο κροσσό μετά το κέντρο, γ) Ποια θα είναι η τάξη του κεντρικού κροσσού αν η απόσταση d μεταξύ των M_2, M_1' αυξηθεί κατά λ_0 και προς ποια διεύθυνση γίνεται η μετακίνηση των κροσσών.

Υπόδειξη: α) Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση που μας δίνει τα μέγιστα για την περίπτωση σχηματισμού κροσσών Haidinger στο συμβολόμετρο του Michelson. Όπου με τα δεδομένα: $m = 4\times10^4$, $\lambda_0 = 0.6328\mu\text{m}$ η τιμή η τιμή του διαστήματος M_2M_1' βρίσκεται ότι είναι: $d = 6.328158\text{mm}$. β) Κατά τα γνωστά στο κέντρο του προτύπου θα έχουμε το σχηματισμό του φωτεινού κροσσού μέγιστης τάξης. Άρα ο $p = 10$ εμφανιζόμενος στο πρότυπο φωτεινός δακτύλιος θα είναι ο κροσσός με τάξη $m' = m - 10$. γ) Θα έχουμε αύξηση της τάξης κατά $\Delta m = 2$ και το πρότυπο συμβολής θα συρρικνώνεται προς το κέντρο.

14. Στο πείραμα του Young όπως φαίνεται στο (Σχ. 14.1), μια λυχνία Na (Νατρίου) που κατά τα γνωστά εκπέμπει ψευδομονοχρωματικό φως μ.κ. $\overline{\lambda} = 0.5892\mu\text{m}$, φωτίζει κυκλικό άνοιγμα (S) διαμέτρου $D = 2a = 0.1\text{mm}$. Το τελευταίο με τη σειρά του φωτίζει σε απόσταση $R = 1.5\text{m}$ δύο κυκλικά ανοίγματα P_1, P_2. Οι διαταραχές από τα P_1, P_2 (με τη μορφή σφαιρικών μετ. κύματος) έρχονται σε επαλληλία σ' ένα

πέτασμα (Π) και μας δίνουν εν γένει φαινόμενα συμβολής εφόσον είναι σχετικά κοντά μεταξύ τους. Επειδή όμως η πηγή (S) έχει διαστάσεις, θέλουμε να ξέρουμε – καθώς τα P_1, P_2 μετακινούνται μεταξύ τους – σε ποια απόσταση οι κροσσοί συμβολής στο πέτασμα (Π) θα εξαφανιστούν για πρώτη φορά.



(Σχ. 14.1)

Υπόδειξη: Στο (ΘΕΜΑ 2) διαπραγματευθήκαμε το πείραμα του Young με την προϋπόθεση ότι η φωτίζουσα τα δύο ανοίγματα P_1, P_2 πηγή, εκπέμπει μεν μονοχρωματικό φως (ή ψευδομονοχρωματικό) αλλά έχει διαστάσεις. Τότε προκειμένου σ' ένα πέτασμα μετά τα δύο ανοίγματα να έχουμε φαινόμενα συμβολής, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας το βαθμό συσχετισμού του φωτός που εκπέμπεται από αυτά. Πρόκειται για το πρόβλημα της χωρικής συμφωνίας του φωτός.

Στην περίπτωση αυτή όπως έχουμε αποδείξει ότι η κατανομή της έντασης του φωτός I_P σ' ένα σημείο P του πετάσματος (Π), δίνεται από τη ((σχ. 2.15) στο (ΘΕΜΑ 2)): $I_P = I_1' + I_2' + V_{21}\sqrt{I_1' I_2'}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l_1 - l_2) + \beta_{21}\right]$, όπου V_{21} το μέτρο μιας συνάρτησης Γ_{21} που ονομάζεται βαθμός χωρικής συμφωνίας ($\Gamma_{21} = V_{21}e^{\beta_{21}}$). Και κατά προέκταση η ευκρίνεια των κροσσών θα δίνεται από τη (σχ. 2.18) στο (ΘΕΜΑ 2): $\mathcal{V} = V_{21}\frac{2\sqrt{I_1' I_2'}}{I_1' + I_2'}$. Που σημαίνει ότι αν κατά κάποιο τρόπο $V_{21} = 0$ τότε $\mathcal{V} = 0$, οπότε οι κροσσοί συμβολής δεν εμφανίζονται στο πέτασμα (Π) και η ένταση του φωτός θα είναι: $I_P = I_1' + I_2'$ δηλ. σταθερή.

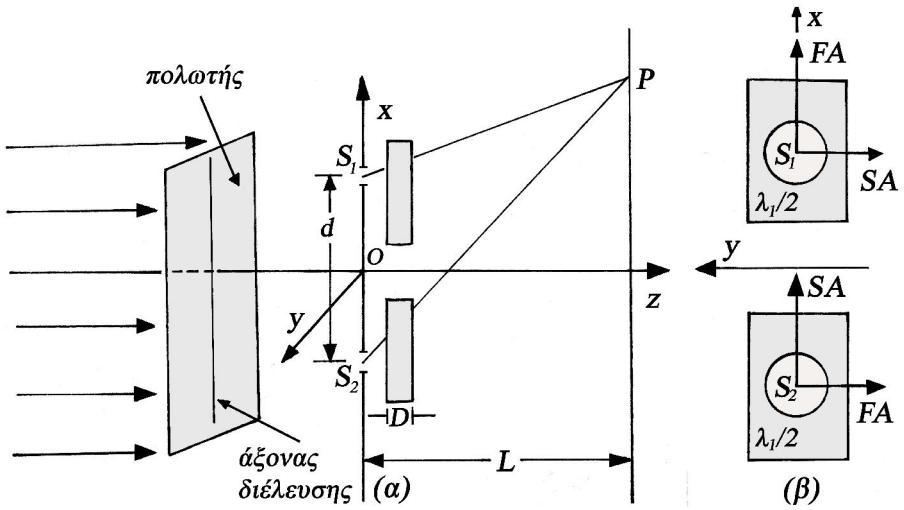
Και όπως αποδεικνύεται από τη (σχ. 2.25) στο (ΘΕΜΑ 2) θα έχουμε:

$V_{21} = |\Gamma_{21}| = \dfrac{2J_1(2\pi p)}{2\pi p}$ όπου $p = \dfrac{\sin \mathrm{a}d}{\lambda}$ (εδώ $\beta_{21} = 0$). Οπότε θα έχουμε για πρώτη φορά $V_{21} = 0$ όταν $2\pi p = 3.83$ (βλ. (Σχ. 12.2β) της λυμένης (Άσκ. 12)), που σημαίνει ότι $P_1P_2 = d = \dfrac{1.22\lambda R}{2a}$ επειδή $\sin \mathrm{a} \simeq \mathrm{a} = D/2R = a/R$ όπως φαίνεται από το (Σχ. 14.1). Και με βάση τα δεδομένα της άσκησης, θα έχουμε για πρώτη φορά εξαφάνιση των κροσσών, όταν $P_1P_2 = d = 10.78\mathrm{mm}$.

Προκειμένου να αντιληφθούμε τον ταχύτατο αποσυσχετισμό των διαταραχών στην περιοχή των P_1, P_2 αρκεί ν' αυξήσουμε το μέγεθος της πηγής (S). Πράγματι αν η διάμετρός της γίνει $D = 2a = 1\mathrm{cm}$, τότε θα μπορέσουν οι διαταραχές να συσχετιστούν στο πέτασμα (Π) δίνοντας φαινόμενα συμβολής, όταν η οριακή απόσταση μεταξύ των δύο ανοιγμάτων P_1, P_2 είναι (για πρώτη φορά) τουλάχιστον $P_1P_2 = d = 0.1\mathrm{mm}$. Αυτή για την συγκεκριμένη περίπτωση, θα είναι όπως λέμε και η διάμετρος της περιοχής συμφωνίας στη θέση των δύο κυκλικών ανοιγμάτων όταν $D = 2a = 1\mathrm{cm}$.

Σημείωση: Το τι ακριβώς συμβαίνει για τις περιπτώσεις που η απόσταση d μεταξύ των δύο ανοιγμάτων συνεχίζει ν' αυξάνεται μετά από την πρώτη εξαφάνιση των κροσσών μελετάται λεπτομερώς στο (ΘΕΜΑ 2).

15. Στη διάταξη Young του (Σχ. 15.1α) τα δύο κυκλικά ανοίγματα S_1, S_2 απέχουν μεταξύ τους απόσταση d και βρίσκονται πάνω στον άξονα x τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων x, y, z . Το πέτασμα πάνω στο οποίο σχηματίζεται το



(Σχ. 15.1)

πρότυπο των κροσσών συμβολής απέχει από αυτά απόσταση L. Τα τελευταία φωτίζονται από ένα επίπεδο μετ. κύματος μονοχρωματικού φωτός μ.κ. λ_1 που διαδίδεται κατά τη διεύθυνση του άξονα z. Το φως αυτό με τη βοήθεια ενός πολωτή του οποίου ο άξονας διέλευσης είναι παράλληλος με τον άξονα x, καθίσταται γραμμικά πολωμένο. Ακριβώς πίσω από το άνοιγμα S_1 τοποθετούμε ένα πλακίδιο καθυστέρησης $\lambda_1/2$ από Ασβεστίτη, πάχους D του οποίου ο ταχύς άξονας έχει τη διεύθυνση του άξονα x (Σχ. 15.1β) . Επίσης ένα ίδιο πλακίδιο τοποθετείται πίσω από το άνοιγμα S_2, όμως κατά τη x διεύθυνση βρίσκεται τώρα ο βραδύς άξονας του πλακιδίου. α) Να υπολογιστεί η μετατόπιση του προτύπου των κροσσών συμβολής μετά την τοποθέτηση των πλακιδίων πίσω από τα ανοίγματα. β) Τι ακριβώς θα συμβεί στο πρότυπο συμβολής αν ο άξονας διέλευσης του πολωτή προσανατολιστεί κατά τη διεύθυνση του άξονα y. γ) Ποια ακριβώς θα είναι η μετατόπιση του προτύπου όταν το προσπίπτον στον πολωτή επίπεδο μετ. κύματος έχει μ. κ. ίσο με λ_2. δ) Προς ποια ακριβώς κατεύθυνση γίνεται η μετατόπιση των κροσσών συμβολής;

Υπόδειξη: α) Με βάση την υπόδειξη της άλυτης (Άσκ. 7), γνωρίζουμε ότι για την περίπτωση που μπροστά από τα ανοίγματα S_1, S_2 τοποθετηθούν πλακίδια με δ.δ. n_1, n_2 τότε το πρότυπο των κροσσών συμβολής μετατοπίζεται στη διεύθυνση του άξονα x κατά $\Delta x = \frac{DL}{d}(n_1 - n_2)$. Η μετατόπιση μάλιστα γίνεται προς το πλακίδιο με το μεγαλύτερο δ.δ. Και εφόσον το γραμμικά πολωμένο φως από το άνοιγμα S_1 προσπίπτει στο πλακίδιο παράλληλα με τον ταχύ του άξονα τότε ο δ.δ. του θα είναι n_e. Αντίστοιχα για το πλακίδιο στο άνοιγμα S_2 θα είναι n_o. Όπου κατά τα γνωστά για τον Ασβεστίτη $n_e < n_o$. Επίσης είναι γνωστό ότι η περίοδος T των κροσσών συμβολής δίνεται από τη σχέση: $T = \lambda_1 L/d$. Επομένως ο αριθμός των περιόδων N κατά τον οποίο μετατοπίσθηκε το πρότυπο των κροσσών συμβολής θα είναι: $N = \frac{\Delta x}{T} = \frac{DL|n_e - n_o|/d}{\lambda_1 L/d} \Rightarrow N = \frac{|n_e - n_o|D}{\lambda_1}$. Και επειδή τα πλακίδια καθυστέρησης είναι $\lambda_1/2$ τότε: $|n_e - n_o|D = \lambda_1/2$. Όπου $|n_e - n_o|D$ ο διανυόμενος οπτικός δρόμος στο εσωτερικό των πλακιδίων. Και τελικά: $N = 1/2$. Δηλ. θα έχουμε μετατόπιση του προτύπου των κροσσών συμβολής κατά το ήμισυ της περιόδου τους. Δηλ. κατά $\Delta x = \lambda_1 L/2d$. Και η μετατόπιση θα γίνει κατά τα αρνητικά του άξονα x.

β) Η μετατόπιση του προτύπου συμβολής θα είναι του ιδίου μεγέθους αλλά τώρα θα γίνει κατά τη διεύθυνση του άξονα x.

γ) Το $\lambda_1/2$ πλακίδιο για το μ.κ. λ_1, θα είναι λ_2/x πλακίδιο για το μ.κ. λ_2. Και με βάση τις σχέσεις: $|n_e - n_o|D = \lambda_1/2$, $|n_e - n_o|D = \lambda_2/x$ βρίσκουμε: $x = 2\lambda_2/\lambda_1$.

Οπότε για την περίπτωση αυτή το πρότυπο συμβολής θα μετατοπιστεί κατά N' περιόδους T' όπου: $N' = \frac{\Delta x}{T'} = \frac{DL|n_e - n_o|/d}{\lambda_2 L/d} \Rightarrow N' = \frac{|n_e - n_o|D}{\lambda_2}$ με την προϋπόθεση ότι ο παράγοντας $|n_e - n_o|$ (δηλ. οι δ.δ.) έχει μικρή εξάρτηση από τα μ.κ. λ_1, λ_2. Αλλά $|n_e - n_o|D = \lambda_2 / x$ οπότε $N' = 1/x$ και τελικά: $N' = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$.

δ) Η μετατόπιση θα γίνεται πάντα προς την κατεύθυνση του πλακιδίου που έχει τον μεγαλύτερο δ.δ.